

§9: テンソル場の例

- ベクトル場
- $\nabla$ -コノ計量
- 複素構造
- 微分形式

設定:  $M = (M, A) : m\text{-mfd}$ .

§ 9.1 :  $\forall \varphi \in \mathcal{L}$  場合

Thm 9.1.1 :  $\mathcal{H}(M) \cong T_{\text{en}}^{(1,0)} M$  as  $C^\infty(M)$ -mods.

Hint : 各  $p \in M$  について

$$T_p^{(1,0)} M \cong T_p M \quad (\text{再帰性 \& [1] の \& 1 に注意})$$

§ 9.2 : 1-2: 計量

Def 9.2.1 :  $g \in \text{Ten}^{(0,2)}M$

$$:= \{ \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M) \mid \text{bi } C^\infty(M)\text{-hom} \}$$

$\forall M$  上の 1-2: 計量

$\Leftrightarrow$   
def ① (対称性)  $g(X_1, X_2) = g(X_2, X_1)$   
 $\forall X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$

かつ

② (正定性)  $\forall X \in \mathfrak{X}(M),$

$g(X, X)$  は  $M$  上の 非負実数値関数

で、 $g(X, X)(p) = 0 \Leftrightarrow X_p = 0 \quad (p \in M),$

Thm 9.2.2 :  $g \in \text{Ten}^{(0,2)}M$  是  $(1,2)$ -张量

$$\Leftrightarrow \forall p \in M, g_p \in T_p^*M \otimes T_p^*M$$

$T_pM$  上的正定内积

Ex 9.2.3:  $M = \mathbb{R}^m$  と可. ( $u = \text{id}_{\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ )

さて

$$g = \sum_{i=1}^m du_i \otimes du_i \quad \text{は } \mathbb{R}^m \text{ 上の 1-2 形式}$$

さて  $g$  は  $\mathbb{R}^m$  上の標準計量と呼ばれ可.

各  $p \in \mathbb{R}^m$  に対して座標基底  $(\frac{\partial}{\partial u_i})_p)_{i=1, \dots, m}$  は

$g_p$  を定める  $T_p M$  上の内積 1-2 正規直交基底と可.

Thm 9.2.4  $N : n\text{-mfd}$ ,  $M : m\text{-mfd}$  と

$\iota : N \rightarrow M$  と  $\iota_* : \mathfrak{t}_* (C^\infty \mathfrak{p}_1)$   
 $d\iota_p : T_p N \rightarrow T_p M$  が単射  
 と可也.

$\exists \tau : g$  上  $M$  上の  $\|\cdot\|$  量と可也.

このとき  $N$  上の  $\|\cdot\|$  量  $\iota^* g$  で可也.

以下に満足可也の  $\mathfrak{p}_1$  の可也可也.

$\forall p \in N$ ,  $\forall v_1, v_2 \in T_p N$ ,

$$(\iota^* g)_p(v_1, v_2) = g_{\iota(p)}(d\iota_p(v_1), d\iota_p(v_2)).$$

Ex 9.2.5

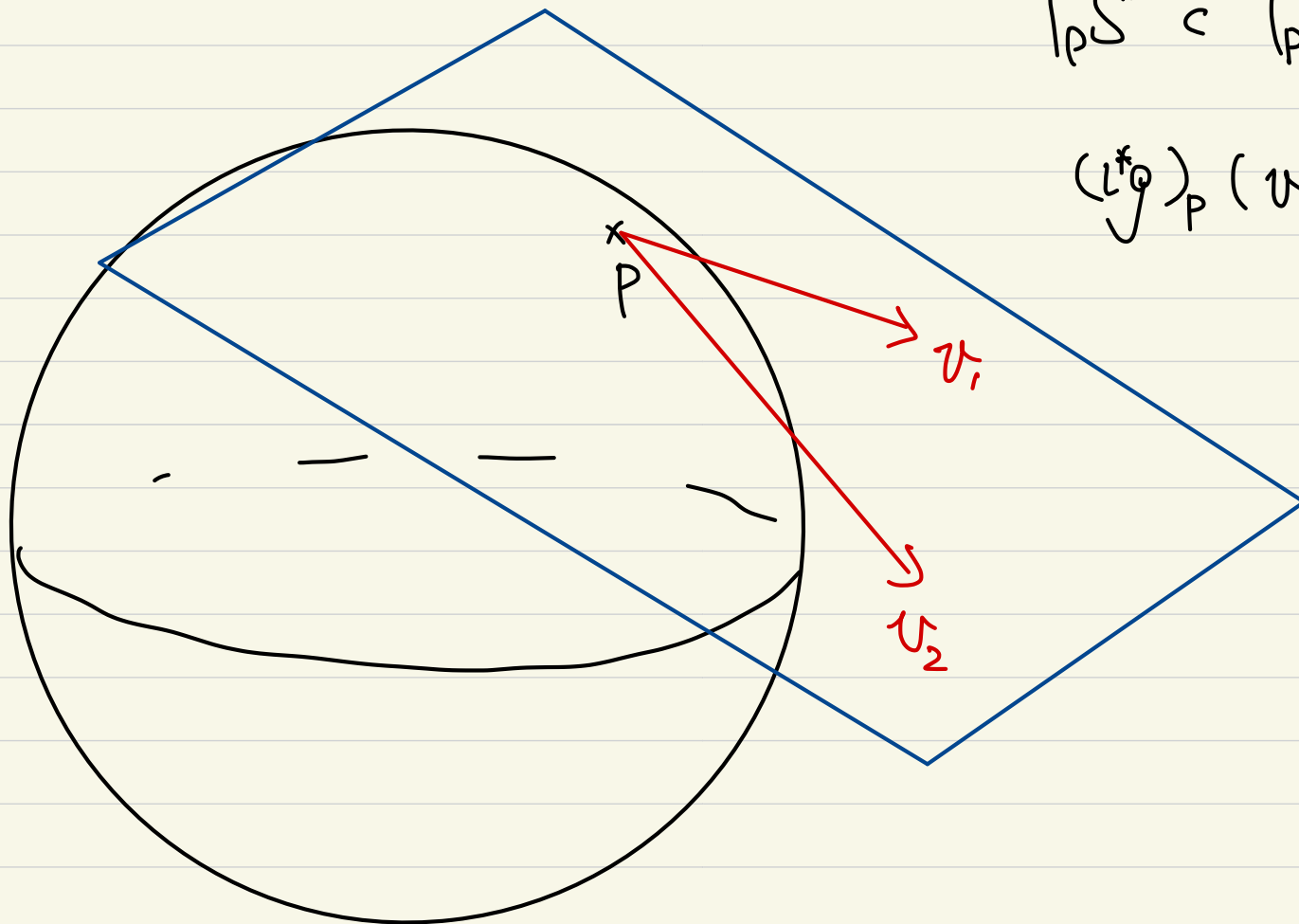
$$S^{m-1} := \{ x \in \mathbb{R}^m \mid \sum_{i=1}^m x_i^2 = 1 \}$$

$\mathbb{R}^m$  の正則部分群の群.

$\iota : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$  は包含写像である.

$g$  は  $\mathbb{R}^m$  上の標準計量である.

$\iota^* g$  は  $S^{m-1}$  上の 1-2 計量を誘導する.



$$T_p S^2 \subset T_p \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^3 \text{ is identified}$$

$$(L^*_g)_p(v_1, v_2) = (v_1, v_2)_{\mathbb{R}^3}$$



## § 9.3 : 概複素構造

Def 9.3.1 :  $J \in \text{Ten}^{(1,1)} M$  の概複素構造

(almost complex structure)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall p \in M,$

$$J_p \in T_p M \otimes T_p^* M \cong \text{End}(T_p M) \quad \text{Section 4}$$

$$\underbrace{J_p \circ J_p}_{\text{合成}} = -\text{id}_{T_p M}$$

( $M$  上の各点の接空間) に “90°回転” を定めるもの.)

Prop 9.3.2 :

$M$  上の複素構造  $\mathbb{C}$  存在  $\Leftrightarrow \dim M$  は偶数

Hint: 奇数次実正定行列は必ず実固有値を持つ.

Ex 9.3.3:  $M = \mathbb{R}^2$  とする.  $(u = \text{id}_{\mathbb{R}^2}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2)$

$$J = \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right) \otimes du_2 - \left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right) \otimes du_1$$

が  $M$  上の複素構造

本当は「複素構造」が重要だね

いよいよ準備が完了したのでここから紹介したい。

多変数複素解析に興味のある人は調べてみて欲しい  
(質問やコメントも歓迎)

## § 9.4: 微分形式

設定.  $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Def 9.4.1:  $\omega \in \text{Ten}^{(0,k)} M$

$$(\coloneqq \text{MHom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), \dots, \mathfrak{X}(M), C^\infty(M)))$$

or  $k$ -次微分形式 ( $k$ -form)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \omega$  は 交代形式;

i.e.  $\forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$   $k$ -次置换群

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = (\text{sgn } \sigma) \omega(X_1, \dots, X_k)$$

in  $C^\infty(M)$

$$\bigwedge^k(M) := \{ \omega \in \text{Ten}^{(0,k)} M \mid k\text{-form } \omega \text{ is alt.} \}$$

Prop 9.4.2:  $\Lambda^k(M)$  is  $\text{Ten}^{(0,k)}M$  の

部分  $C^\infty(M)$ -mod.

$k$ -form は この講義の主役.

次回以降 深掘り可也.