当面の目標

- 微分形式：各点で"接空間の交代形式"を定めるもの
- 外微分の定義と性質

Section 10 交代形式

- 交代形式
- 外積
- 基底について

Section 10.1 : 交代形式

設定 : V : 有限次元ベクトル空間 $/\mathbb{R}$

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 10.1.1 : $\phi \in (V^\vee)^{\otimes k}$ が V 上の k 次交代形式

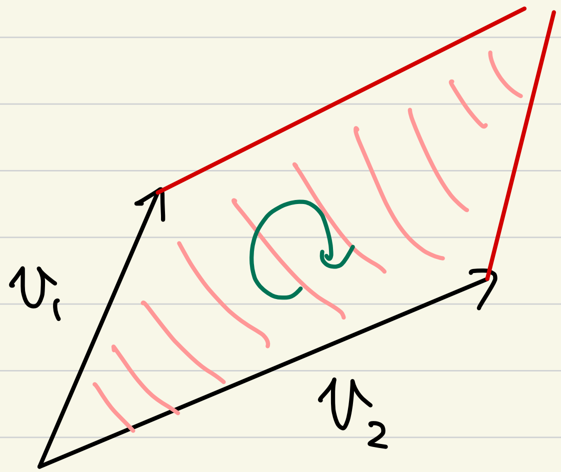
(k-form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (v_1, \cdots, v_k) \in V^k$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \phi(v_1, \cdots, v_k)$$

$\bigwedge^k V^\vee := \{ k\text{-forms on } V \}$ とおく.

2-form on V の役割



V 内の

"向き付けられた平行四辺形"

に実数を与える.

Prop 10.1.2 : $\bigwedge^k V^\vee$ は $(V^\vee)^{\otimes k}$ の線型部分空間 $/\mathbb{R}$

ver.

Remark : $\bigwedge^0 V^\vee = (V^\vee)^{\otimes 0} \cong \mathbb{R}$

$\bigwedge^1 V^\vee \cong V^\vee$

Prop 10.1.3 : M : m-mfd とする.

レいたい。

$\forall \omega \in \Omega^k(M)$, $\forall p \in M$ について

$$\omega_p \in \Lambda^k T_p^\vee M$$

Section 10.2 : 交代形式の外積

設定 : V : ~

$k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

外積 $\bigwedge^k V^\vee \times \bigwedge^l V^\vee \to \bigwedge^{k+l} V^\vee$ を定義しよう.

$$(\phi_1, \phi_2) \mapsto \phi_1 \wedge \phi_2$$

Def 10.2.1 : $\phi_1 \in \bigwedge^k V^\vee$, $\phi_2 \in \bigwedge^\ell V^\vee$ について

$$\phi_1 \wedge \phi_2 : V^{k+\ell} \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \dots, v_{k+\ell}) \mapsto \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma)\, \underbrace{\phi_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)})}_{\in \mathbb{R}}\, \underbrace{\phi_2(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+\ell)})}_{\in \mathbb{R}}$$

と定める.

Prop 10.2.2. $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \bigwedge^{k+\ell} V^\vee$

レポ

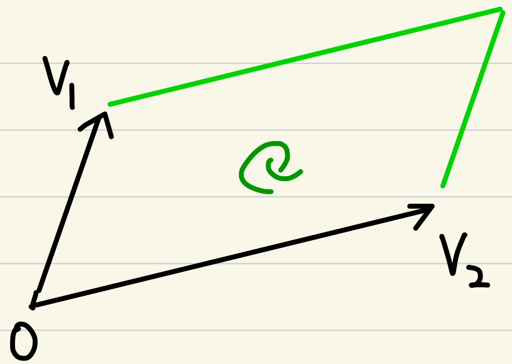
ϕ_1 と ϕ_2 の外積

Prop 10.2.3 : $\phi_2 \wedge \phi_1 = (-1)^{k\ell} \phi_1 \wedge \phi_2$

Ex 10.2.4 :

$k = l = 1$ のとき

$$\phi_1 \wedge \phi_2 (v_1, v_2) = \phi_1(v_1)\phi_2(v_2) - \phi_1(v_2)\phi_2(v_1)$$



Recall : $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

のとき

"v_1, v_2 の定める平行四辺形" の面積 $= |ad - bc|$

Def 10.2.5 : $\overset{*}{\bigwedge} V^\vee := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left(\overset{k}{\bigwedge} V^\vee \right)$ とおく.

Prop 10.2.6 : $\overset{*}{\bigwedge} V^\vee$ は 外積 について

単位的結合的 $\mathbb{R}$ 代数

レポ

Prop 10.2.6 より　$\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in V^\vee$ について

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k \in \bigwedge^k V^\vee$$

が定義される．

Prop. 10.2.7

レポ

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_k = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \alpha_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha_{\sigma(k)}$$

特に $(v_1, \cdots, v_k) \in V^k$ について

$$(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k)(v_1, \cdots, v_k) = \det \begin{pmatrix} \alpha_1(v_1) & \cdots & \alpha_1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_k(v_1) & \cdots & \alpha_k(v_k) \end{pmatrix}$$

Section 10.3 : $\bigwedge^k V^\vee$ の基底

設定 : V : ―――

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $m := \dim V$

目標 : Thm 10.3.1 : $\dim \bigwedge^k V^\vee = \binom{m}{k}$

(特に $k > m$ のとき $\bigwedge^k V^\vee = 0$)

まず次の命題を示す：

Prop 10.3.2：$\phi \in \bigwedge^k V^\vee$, $(v_1, \cdots, v_k) \in V^k$ とする。

$\phi(v_1, \cdots, v_k) \neq 0 \Rightarrow$

$(v_1, \cdots, v_k)$ は一次独立

Cor 10.3.3：$\bigwedge^k V^\vee = 0$ if $k > n := \dim V$

Prop 10.3.2 の証明

対偶を示す：$v_1, \cdots, v_k$ が一次従属であると仮定する.

(示) $\phi(v_1, \cdots, v_k) = 0$

いま $v_1, \cdots, v_k$ は一次従属なので

$i_0 \in \{1, \cdots, k\}$ と $\{a_i \in \mathbb{R}\}_{i \neq i_0}$ であって

$$v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} a_i v_i$$ となるものがとれる.

次の Lemma を使って $\phi(v_1, \cdots, v_k) = 0$ を示す.

Lemma 10.3.4 $(w_1, \cdots, w_k) \in V^k$ について

どれか 2つの成分が等しいなら

$$\phi(w_1, \cdots, w_k) = 0$$

(easy)

$$\phi(v_1,\cdots,v_k) = \phi\Big(v_1,\cdots,v_{i_0-1},\sum_{i\neq i_0} a_i v_i, v_{i_0+1},\cdots,v_k\Big)$$

多重線型性

$$= \sum_{i\neq i_0} a_i \underbrace{\phi(v_1,\cdots,v_{i_0-1},v_i,v_{i_0+1},\cdots,v_k)}_{\text{Lemma 10.1.4 より } 0}$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

次の命題と Cor 10.3.3 より Thm 10.3.1 が従う.

Prop 10.3.5: $k \leq m$ とする.

$\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,\cdots,m}$: V の基底を fix.

$\mathcal{B}^\vee = (e_i^\vee)_{i=1,\cdots,m}$ をその双対基底とする.

このとき $\bigwedge^k \mathcal{B}^\vee := (e_{i_1}^\vee \wedge e_{i_2}^\vee \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^\vee)_{1 \leq i_1 \lneq i_2 \lneq \cdots \lneq i_k \leq m}$

は $\bigwedge^k V^\vee$ の基底

特に $\dim \bigwedge^k V^\vee = \binom{m}{k}$

Ex 10.3.6 :

$M = (M, \mathcal{A})$: m - mfd , $\omega \in A^k(M)$ とする.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ を fix

このとき 各 $p \in O$ について

$$\omega_p = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \xi^{\omega}_{u, i_1 \cdots i_k}(p) \, (du_{i_1})_p \wedge \cdots \wedge (du_{i_k})_p$$

$$\left(\xi^{\omega}_{u, i_1, \cdots, i_k} := \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma) \, \underbrace{y^{\omega}_{u, i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(k)}}}_{\text{Def 8.1.4}} \in C^\infty(O) \right)$$

と表せる.

Prop 10.3.5 の証明

示 ① $\bigwedge^k B^\vee$ は一次独立

② $\bigwedge^k B^\vee$ は $\bigwedge^k V^\vee$ を張る.

以下簡単のため

$$[m] := \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\binom{[m]}{k} := \{ I \subset [m] \mid \# I = k \}$$ とおき,

各 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[m]}{k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ について

$$e_I^\vee := e_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^\vee$$ とおく.

このとき $\bigwedge^k B^\vee = (e_I^\vee)_{I \in \binom{[m]}{k}}$ に注意.

① (示) $\bigwedge^k \mathcal{B}^\vee$ は一次独立

$\{a_I \in \mathbb{R}\}_{I \in \binom{[m]}{k}}$ であって $\sum_I a_I e_I^\vee = 0$ in $\bigwedge^k V^\vee$ となる

ものを任意にとる.

$\forall I \in \binom{[n]}{k}$ をとる.

(示) $a_I = 0$

以下のLemmaを使う

Lemma 10.3.7: $I = \{i_1, \cdots, i_k\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ とする.

このとき各 $I' \in \binom{[m]}{k}$ について

$$e^\vee_{I'}(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & (\text{if } I = I') \\ 0 & (\text{if } I \neq I') \end{cases}$$

(cf. Prop 10.2.7)

いま

$$0 = \left(\sum_{I'} a_{I'} e^\vee_{I'}\right)(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$$

$$= a_I$$

① おわり

② (示) $\overset{k}{\wedge} B^\vee$ は $\overset{k}{\wedge} V^\vee$ を張る.

$\phi \in \overset{k}{\wedge} V^\vee$ を fix

(示) ${}^\exists \{a_I \in \mathbb{R}\}_{I \in \binom{[m]}{k}}$ s.t. $\phi = \sum_I a_I e_I^\vee$

各 $I = \{i_1, \dots, i_k\} \in \binom{[m]}{k}$ $(i_1 < i_2 < \dots < i_k)$ について

$$a_I := \phi(e_{i_1}, \dots e_{i_k}) \in \mathbb{R} \text{ とおく.}$$

(示) $\phi = \sum_I a_I e_I^\vee$

$v_1, \cdots, v_k \in V$ を任意にとる.

(示) $\phi(v_1, \cdots, v_k) = \sum_I a_I e_I^\vee(v_1, \cdots, v_k)$

各 j について

$$v_j = \sum_{i_j=1}^{n} \underbrace{e_{i_j}^\vee(v_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e_{i_j}}_{\in V}$$ に注意

これより

$$\phi(v_1, \cdots, v_k) = \phi\left(\sum_{i_1} e^\vee_{i_1}(v_1) e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_k} e^\vee_{i_k}(v_k) e_{i_k}\right)$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_k} e^\vee_{i_1}(v_1) \cdots e^\vee_{i_k}(v_k)\, \phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$$

ϕの交代性 + Lemma 10.1.4 より

$$= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \underbrace{\left(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \operatorname{sgn}(\sigma)\, e^\vee_{i_1}(v_{\sigma(1)}) \cdots e^\vee_{i_k}(v_{\sigma(k)})\right)} \phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})$$

↓ Prop 10.2.7

$$= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \underbrace{\left((e^\vee_{i_1} \wedge \cdots \wedge e^\vee_{i_k})(v_1, \cdots, v_k)\right)} \underbrace{\phi(e_{i_1}, \cdots, e_{i_k})}_{= a_I}$$

$$= \sum_I a_I\, e^\vee_I(v_1, \cdots, v_k)$$

(2) おわり ∎

Vの基底のとり換えについて

<u>設定</u>：$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_m\}$, $\mathcal{B}' = \{e_1', \cdots, e_m'\}$ Vの基底.

各iについて $e_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j'$ と書く.

$P = (p_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ とおく（基底の変換行列）

<u>記号</u>：$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \cdots, w_n\}$, $(\mathcal{B}')^\vee = \{w_1', \cdots, w_n'\}$.

$\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$の双対基底

記号：$\binom{[m]}{k} := \{ \{1, \cdots, m\}$ の k 点部分集合 $\}$

各 $I := \{ i_1, \cdots, i_k \} \in \binom{[m]}{k}$ について

$(i_1 < \cdots < i_k)$

$$w_I := w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$$
$$w'_I := w'_{i_1} \wedge \cdots \wedge w'_{i_k}$$

$\in \bigwedge^k V^\vee$ とおく.

また $I, J \in \binom{[m]}{k}$ について

$P_{IJ} := (p_{ij})_{i \in I, j \in J}$ とおく（小行列）

Theorem 10.3.8 $I \in \binom{[m]}{k}$ を fix.

このとき

$$w_I = \sum_{J \in \binom{[m]}{k}} (\det P_{I,J})\, w'_J$$

Cor 10.3.9 ($k=m$ の場合：積分論で必要)

$$(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_m) = (\det P) \cdot (w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_m)$$

Proof of Thm 10.3.8 : $I \in \binom{[m]}{k}$ を fix

$w_I \in \bigwedge^k V^\vee$ であり

$\{ w'_J \mid J \in \binom{[m]}{k} \}$ は $\bigwedge^k V^\vee$ の基底であるから
(Thm 10.3.1)

$$w_I = \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} a_J w'_J \qquad (a_J \in \mathbb{R})$$

と一意的に表せる.

示 $\forall J \in \binom{[n]}{k},\ a_J = \det P_{I,J}$

$\forall J \in \binom{[m]}{k}$ をとる.

示 $a_J = \det P_{I,J}$

Lemma 10.3.7 より $J = \{j_1, \cdots, j_k\}$ $(j_1 < \cdots < j_k)$

と書いたとき,

各 $J' \in \binom{[m]}{k}$ について

$$w_{J'}(e_{j_1}', \cdots, e_{j_k}') = \begin{cases} 1 & (J = J') \\ 0 & (J \neq J') \end{cases}$$

に注意すると, $a_J = w_I(e_{j_1}', \cdots, e_{j_k}')$

証 $w_I(e'_{j_1},\dots,e'_{j_k}) = \det P_{I,J}$

左辺 $= (w_{i_1}\wedge\cdots\wedge w_{i_k})(e'_{j_1},\dots,e'_{j_k})$

$$= \det\begin{pmatrix} w_{i_1}(e'_{j_1}) & \cdots & w_{i_1}(e'_{j_k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{i_k}(e'_{j_1}) & \cdots & w_{i_k}(e'_{j_k}) \end{pmatrix} \quad (\because \text{Prop } 10.2.7)$$

$$= \det\begin{pmatrix} p_{i_1j_1} & \cdots & p_{i_1j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ p_{i_kj_1} & \cdots & p_{i_kj_k} \end{pmatrix} = \det P_{IJ}$$

∎

$(\because\ w_i(e'_j) = p_{ij})$

Section 10.4 : 微分形式の外積

設定 : M : m-mfd

Def 10.4.1 : $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

各 $\omega_1 \in \mathcal{A}^k(M)$, $\omega_2 \in \mathcal{A}^\ell(M)$ について

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : \mathfrak{X}(M)^{k+\ell} \to C^\infty(M)$$

$$(X_1, \cdots, X_{k+\ell}) \mapsto \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \operatorname{sgn}(\sigma)\, \underbrace{\omega_1(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)})}_{\in\, C^\infty(M)}\, \underbrace{\omega_2(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+\ell)})}_{\in\, C^\infty(M)}$$

と定める

Prop 10.4.2 : $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^{k+l}(M)$

Prop 10.4.3 : $\forall p \in M$, $(\omega_1 \wedge \omega_2)_p = (\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p$

Prop 10.4.4 : $\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{kl}(\omega_1 \wedge \omega_2)$

Thm 10.4.4 : $\Lambda^*(M) := \bigoplus_{k=0}^{\infty} \Lambda^k(M)$ は外積について単位的結合的 $\mathbb{R}$ 代数

レポ