

Section 14 : 微分形式の積分

設定 : $\Omega := (\Omega, A) : k\text{-mfd u.b.}$

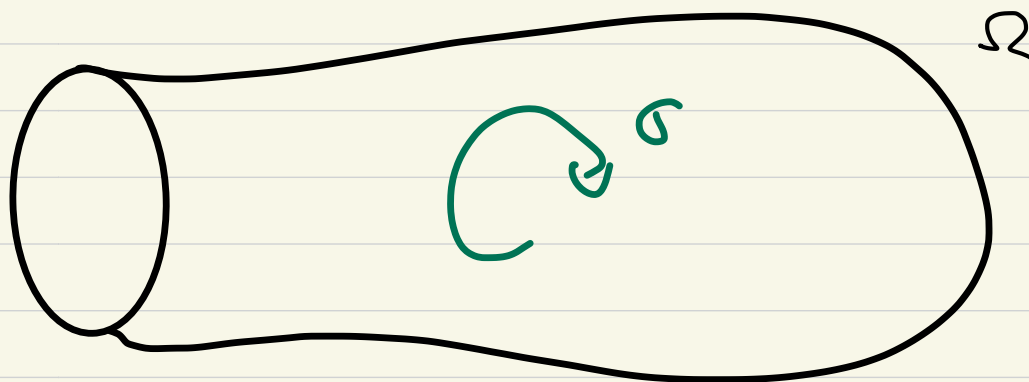
$\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

目標 : Ω 上の $2n$ -形式 ω に対して k -form ω について

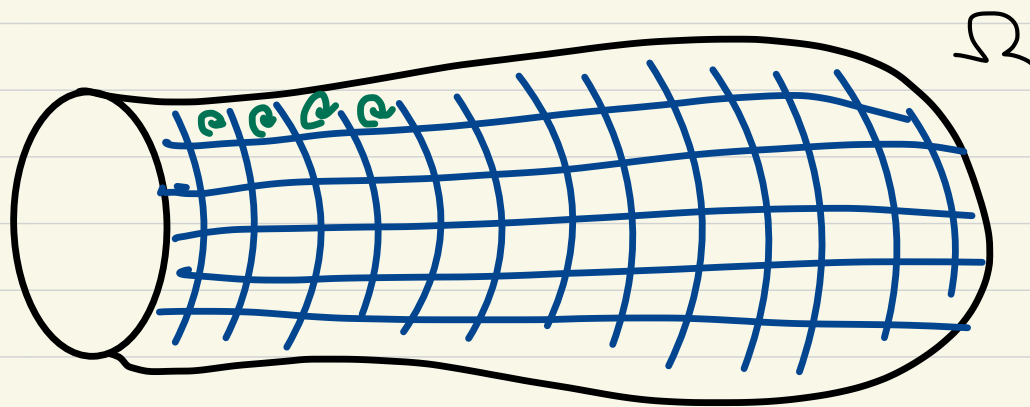
積分 $\int_{(\Omega, \sigma)} \omega \in \mathbb{R}$ を定義する。

$$\int_{(\Omega, \sigma)} \omega \text{ の 近似 } \zeta$$

何れ何れ 何れ何れ



何れ何れ
微小平行四辺形
に "分割"



各 微小平行四辺形 ω に "代入" して 足しあわせ

$\text{supp } \omega$ がコンパクトで ω と有限和 に なる

難点 : Ω は 微小平行四辺形 で分割できる?

$\leadsto$ 正確に分割可能か? 49.

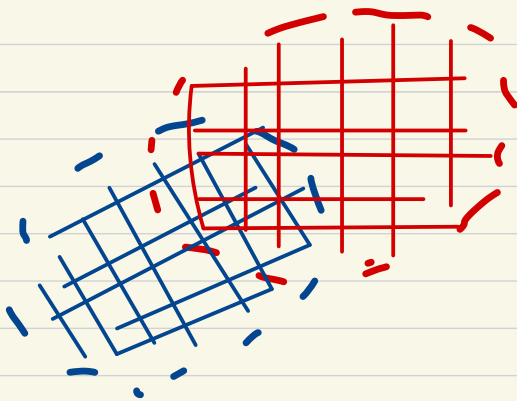
零团长 : 各局所座標上では分割できる.

(γ - τ = 積分の本質)

Ω 全体では "1 の分割" と同じで

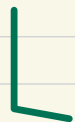
各局所座標上の分割と

全体で "重ね合わせ".



Section 14.1 : $\exists$ 11071 台 $\neq$ 77 $>$ 微分形可

設定 : $\Omega = (\Omega, \mathcal{A})$: $\mathbb{K}$ -mfd. w.b.



$$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

Def 14.1.1 : 各 $\omega \in \Lambda^l(\Omega)$ に対し

$\lfloor \text{supp } \omega := \overline{\{p \in \Omega \mid \omega_p \neq 0\}} \leftarrow \Omega \text{ に対する閉包}$

Def 14.1.2 :

$\lfloor \Lambda_c^l(\Omega) := \{ \omega \in \Lambda^l(\Omega) \mid \text{supp } \omega \text{ はコンパクト} \}$

Prop 14.1.3 :

$\lfloor \Lambda_c^l(\Omega) \text{ は } \Lambda^l(\Omega) \text{ の部分 } C^\infty(\Omega) \text{ 加群}$

以下 $O \subset_{\text{open}} \Omega \subset \mathbb{R}^d$.

Def 14.1.4

$$\lfloor \Lambda_c^l(\Omega; O) := \{ w \in \Lambda_c^l(\Omega) \mid \text{supp } w \subset O \}$$

Prop 14.1.5

$$\lfloor \Lambda_c^l(\Omega; O) \text{ は } \Lambda_c^l(\Omega) \text{ の部分 } C^\infty(\Omega) \text{ 空間}$$

以下の命題は後で使う

Prop 14.1.6 各 $\omega \in \Lambda_c^l(\Omega; 0)$ に対して

0 は $\mathbb{R}^n$ の support

$$\rightarrow \text{supp}(\omega|_0) = \text{supp } \omega$$

$$\# \text{ に } \Lambda_c^l(\Omega; 0) \rightarrow \Lambda_c(0), \omega \mapsto \omega|_0$$

is well-defined

Hint: Ω の Hausdorff 性を使う

Section 14.2: H_k 上の 1 -形式積分

H_k の開集合上の関数の 1 -形式積分の記号を設定しておく.

設定: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

U : H_k の開集合

$$(H_k := \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_k \geq 0\})$$

$$\sigma_U \in \{\pm 1\}$$

記号:

$$C_c(U) := \{f \in C(U) \mid \text{supp } f : \text{コンパクト}\}$$

: U 上でコンパクト台を持つ連続関数全体のなす
ベクトル空間

$U \subset H_k \subset \mathbb{R}^k$ に注意

Fact 14.2.1 : $\forall f \in C_c(U)$, f は U 上 n -可積分

Def 14.2.2 :

$$I_{(U, \sigma_U)} : C_c(U) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \underbrace{\sigma_U}_{\substack{\uparrow \\ \{\pm 1\}}} \cdot (f \text{ on } U \text{ 上 } n\text{-可積分})$$

(重積分 = 累次積分)

Prop 14.2.3 : $I_{(U, \sigma_U)} : C_c(U) \rightarrow \mathbb{R}$ は線型写像

設定: $U_1, U_2 \subset H_K$. U_1, U_2 : 連結
 $\emptyset^* \quad \emptyset^*$ open

$\tau: U_1 \rightarrow U_2$: C^∞ 級同相

$$\left(\begin{array}{l} \leadsto \det(J\tau)_u > 0 \quad (\forall u \in U_1) \\ \text{or} \\ \det(J\tau)_u < 0 \quad (\forall u \in U_1) \end{array} \right)$$

$$\sigma_{U_1}, \sigma_{U_2} \in \{\pm 1\}$$

$$\text{with } \sigma_{U_1} \cdot \sigma_{U_2} = 1 \Leftrightarrow \det(J\tau)_u > 0 \quad (\forall u \in U_1)$$

$$\sigma_{U_1} \cdot \sigma_{U_2} = -1 \Leftrightarrow \det(J\tau)_u < 0 \quad (\forall u \in U_1)$$

Fact 14.2.4 (変数変換公式の応用)

$$\forall f \in C_c(U_2)$$

$$I_{(U_1, \sigma_{U_1})}(\underbrace{\tau^* f}_{\in C^\infty(U_1)}) \cdot \underbrace{\det(J\tau)}_{\in C^\infty(U_1)} = I_{(U_2, \sigma_{U_2})}(f)$$

$$f \circ \tau = f \circ \tau \circ \tau^{-1}$$

Section 14.3 : 局所座標上の微分形式の積分

設定 : $\Omega = (\Omega, A) : k\text{-mfd v.b.}$

$$\begin{array}{l} \sigma : A_{\text{conn}} \rightarrow \{\pm 1\}, (0, U, u) \mapsto \sigma(u) : \Omega \text{ 上の } [1] \\ (0, U, u) \in A_{\text{conn}} \end{array}$$

目標 : $\int_{(0, \sigma(u))} : \Delta_c^k(\Omega; 0) \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \int_{(0, \sigma(u))} \omega$
は定数。

Prop 14.3.1 : $\forall \omega \in \Lambda_c^k(\Omega; \mathbb{R}) \Rightarrow \exists!$

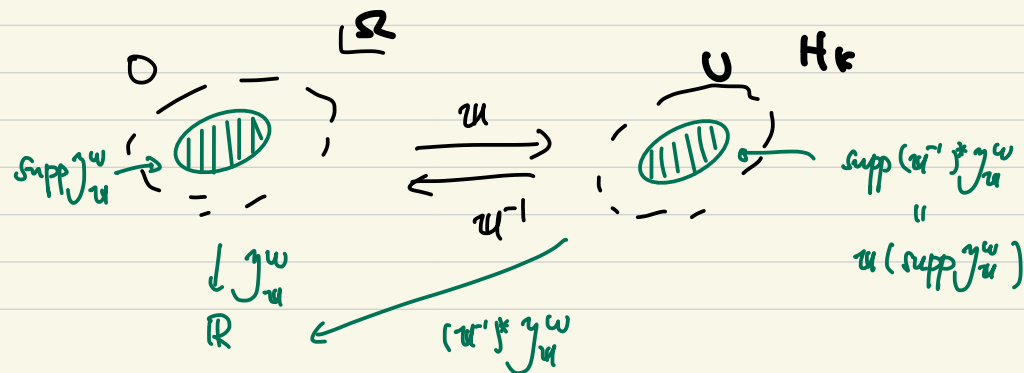
$$\exists! j_\omega^\omega \in C_c^\infty(O) \text{ s.t. } \begin{cases} \omega|_O = j_\omega^\omega \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n \\ \text{supp } j_\omega^\omega = \text{supp}(\omega|_O) = \text{supp } \omega \end{cases}$$

Hint : Prop 14.1.6

Observation 14.3.2 : $\pm$ a 設定?

$$(u^{-1})^* j_\omega^\omega \in C_c^\infty(U) \text{ s.t. } \text{supp}((u^{-1})^* j_\omega^\omega) = u(\text{supp } \omega)$$

$u^{-1}: U \rightarrow O$
 $\downarrow$
 $\text{is } \mathbb{R}^n / \mathbb{R}^k$



Def 14.3.2

$$\int_{(0, \sigma(u))} : \Lambda_c^k(\Omega; 0) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto \tilde{L}_{(U, \sigma(u))}(\underbrace{(u')^* \eta_u^\omega})$$

$$C_c^\infty(U) \subset C_c(U)$$

a元

Prop 14.3.3

$$\int_{(0, \sigma(u))} : \Lambda_c^k(\Omega; 0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{は線型写像}$$

次の命題は後で使う

Prop 14.3.4: $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_{\text{conn}}$
with $O \cap O' \neq \emptyset$

$$\omega \in \Lambda_c^k(\Omega; O \cap O') \quad \text{と可.}$$

$$(\equiv \Lambda_c^k(\Omega; O) \cap \Lambda_c^k(\Omega; O'))$$

また

$$\int_{(O, \sigma(u))} \omega = \int_{(O', \sigma(v))} \omega.$$

($\hookrightarrow$ 局所座標で積分しても
同じ)

要する: 上の命題が成り立つように

“微分形式”と“向き”を定義した.

Prop 14.3.4 は以下の Lemma, 何と定義 (Section 13)

及び Fact 14.2.4 により示す

Lemma 14.3.5 Prop 14.3.4 の設定に於いて

$$\omega|_O = g_u^w \cdot du_1 \wedge \dots \wedge du_n \quad (g_u^w \in C^\infty(O))$$

$$\omega|_{O'} = g_v^w \cdot dv_1 \wedge \dots \wedge dv_n \quad (g_v^w \in C_c^\infty(O))$$

を示す。

$$(u^{-1})^* g_u^w \Big|_{u(O \cap O')} = \tau_{uv}^* \left((v^{-1})^* g_v^w \Big|_{v(O \cap O')} \right) \cdot \det(J\tau_{uv})$$

Hint: Cor 10.3.9

Section 14.4: 1 の分割

Recall: Cut-off 関数 (cf. Section 5) は

“局所的に定義されているもの”

全体に延長可能”に便利

1 の分割 は更に進化して

“各点のまわりで定義されているものを貼り合わせて

全体で定義可能”

のに便利

設定: X : 位相空間

$\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: X の部分集合族

Def. 14.4.1: $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が 局所有限 (locally finite)

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X, \exists V_x: x \text{ の open nbd}$
s.t. $\bigwedge (V_x) := \{ \lambda \in \Lambda \mid C_\lambda \cap V_x \neq \emptyset \}$
が 有限.

$\mathcal{O}$: X a open cover $\varepsilon \overline{\mathcal{O}}$.

Def 14.42 (1 a / 分割)

X 上 a 連続関数 a 族 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 也

$\mathcal{O}$ 上 従う 1 a / 分割 (partition of unity subordinate to $\mathcal{O}$)

$\Leftrightarrow$ $\stackrel{\text{def}}{\text{def}}$ (1) $\psi_\lambda(x) \in [0, 1]$ ($\forall \lambda, \forall x$) PUS to $\mathcal{O}$ 也 略可

(2) $\forall \lambda \in \Lambda, \exists O \in \mathcal{O}$ s.t. $\text{supp } \psi_\lambda \subset O$

(3) $\{\text{supp } \psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は 局所有限

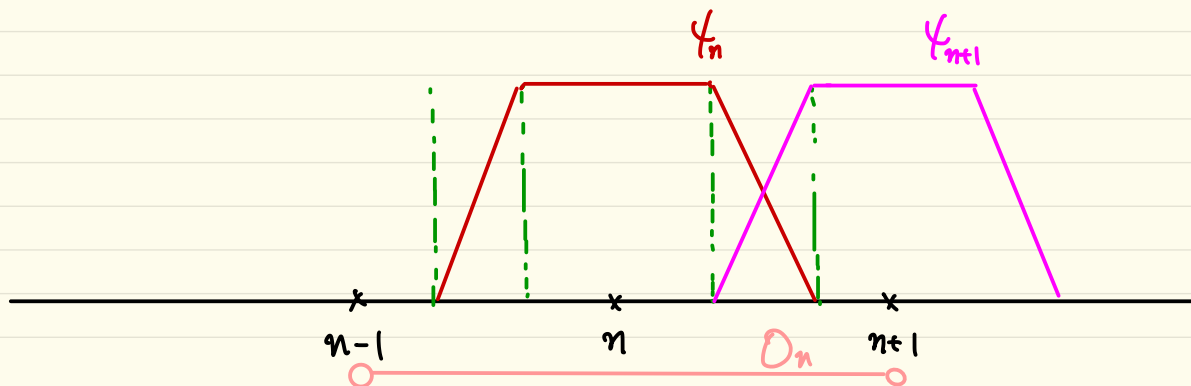
(4) $\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) = 1$ ($\forall x \in X$) (3) 利 左辺 局所有限和

Ex 14.4.3 $X = \mathbb{R}$

$$\mathcal{O} = \{ \mathcal{O}_n := (n-1, n+1) \}_{n \in \mathbb{Z}} \quad a \in \mathbb{Z}$$

$$\{ \psi_n \}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \psi_n(x) = \begin{cases} 1 & n - \frac{1}{3} \leq x \leq n + \frac{1}{3} \\ 3(x - (n - \frac{2}{3})) & n - \frac{2}{3} \leq x < n - \frac{1}{3} \\ -3(x - (n + \frac{1}{3})) + 1 & n + \frac{1}{3} < x \leq n + \frac{2}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\psi_n \in \mathcal{C}^\infty$ PUS to $\mathcal{O}$.



以下, Ω : k -dim'l C^∞ -mfd w.b. $\exists$ d.

この定理は次の定理で成り立つ.

Theorem 14.4.4

$\forall \mathcal{O}$: Ω a open cover

$\exists \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: PUS to $\mathcal{O}$

s.t. $\psi_\lambda \in \underline{C^\infty}(\Omega)$ ($\forall \lambda \in \Lambda$)

この定理の証明には 第=可算公理, Hausdorff 性 が 用いられる.

証明は付録 1-1 として 3.7.2 のように 予定.

応用例 (この講義では使わない)

Theorem 14.4.5 任意の C^∞ -mfd w.b. は l_1 - 2 -計量を持つ。
└ 特に距離化可能。

Hint : 各座標で計量を定義しておいて,
└ 1 の分割を用いて
全体で貼り合わせる。

Section 14.5: k -manifolds on differential forms and integration

設定: $\Omega = (\Omega, A)$: k -mfd w.b.

$\sigma: A_{\text{conn}} \rightarrow \{\pm 1\}$: M a 1-2.

目標: $\int_{(\Omega, \sigma)}: \Delta_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, \omega \mapsto \int_{(\Omega, \sigma)} \omega$ is defined.

Theorem 14.5.1 (微分形式の積分)

線型写像 $\int_{(\Omega, \sigma)} : \Lambda_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ $\omega \in (\Omega, \sigma)$ 上の積分

$$\omega \mapsto \int_{(\Omega, \sigma)} \omega$$

1° & 2°, 以下の条件 $(*)$ を満たす ω が $\mathbb{R}^n$ 上に存在する:

条件 $(*)$: $\forall (0, U, \mu) \in \mathcal{A}_{\text{comp}}, \forall \omega \in \Lambda_c^k(\Omega; 0) \subset \Lambda_c^k(\Omega)$

$$\int_{(\Omega, \sigma)} \omega = \int_{(0, \sigma(\mu))} \omega$$

Def 14.3.2

この定理の証明 $\mathbb{R}^n$ の節の 1°-1°.

Thm 14.5.1 を示すために, 命題: 準備 (7) を示す.

準備の設定

$\mathcal{Q} := \{ O \mid (O, U, u) \in \mathcal{A}_{\text{conn}} \text{ と } \partial O \subset \Sigma, \}$

$\mathcal{Q}$ は M の open cover.

$\{ \varphi_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ は $\mathcal{Q}$ に対する PUS とし $\varphi_\lambda \in C^\infty(M)$ (φ_λ) とし

また φ_λ は $\varphi_\lambda = 1$ となる領域 O_λ を含む (Thm 14.4.4 より存在を保障す)

各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\text{supp } \varphi_\lambda \subset O_\lambda$ とし

$(O_\lambda, U_\lambda, u_\lambda) \in \mathcal{A}_{\text{conn}}$ とし

$(O_\lambda \in \mathcal{Q})$

(選択原理
を要する)

Prop 14.5.2 :

代数的直和

$$\text{写像 } \Gamma : \Lambda_c^k(\Omega) \rightarrow \bigoplus_{\lambda \in I} \Lambda_c^k(\Omega; O_\lambda)$$

$$\omega \mapsto (\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda \in I}$$

有限個の成分を除いて0

is well-defined 且つ 単射線型写像

Cor 14.5.3 : $\forall \omega \in \Lambda_c^k(\Omega)$,

support 上の局所座標に収まるように ω は有限個に分割できる.

$$\exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \exists (O_l, U_l, \psi_l) \in \mathcal{A}_{\text{ann}}^i, \exists \omega_l \in \Lambda_c^k(\Omega; O_l)$$

($l = 1, \dots, N$)

$$\text{s.t. } \omega = \sum_{l=1}^N \omega_l$$

Proof of Prop 14.5.2

① $\bar{\varphi}$ is well-defined

② $\bar{\varphi}$ is linear

③ $\bar{\varphi}$ is injective

① 証明: $\forall \omega \in L_c^F(\Omega)$ である.

(i) $(\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda \in \Lambda}$ は有限個の成分を除いて 0

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\text{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega)$ はコンパクトで $\text{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega) \subset O_\lambda$

証明 各 $\lambda \in \Lambda$ について

$$\text{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega) \subset \text{supp} \psi_\lambda \cap \text{supp} \omega$$

に注意.

(i) $(\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda \in \Lambda}$ is a finite sum $\exists$ 有限個の成分 $\exists$ 除. $\omega \neq 0$ $\exists$ 示す.

$$\Delta(\text{supp } \omega) := \{ \lambda \in \Lambda \mid \text{supp } \psi_\lambda \cap \text{supp } \omega \neq \emptyset \}$$

と表す.

$$\text{supp } \psi_\lambda \cdot \omega \subset \text{supp } \psi_\lambda \cap \text{supp } \omega \quad (\forall \lambda) \text{ 对}$$

$\Delta(\text{supp } \omega)$ is a finite set $\exists$ 有限集合 $\exists$ 示す $\exists$ 示す $\exists$ 示す.

$\{ \text{supp } \psi_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ is locally finite $\exists$ locally finite $\exists$

$\text{supp } \omega$ is a $\exists$ 有限集合 $\exists$ 示す $\exists$ 示す

$\exists$ 示す $\exists$ 示す

$\Delta(\text{supp } \omega)$ is a finite set $\exists$ 有限集合 $\exists$ 示す $\exists$ 示す $\exists$ 示す.

(i) is shown.

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\text{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega)$ はコンパクト $\therefore \text{supp}(\psi_\lambda \cdot \omega) \subset O_\lambda$
 である。

$\forall \lambda \in \Lambda \exists \varepsilon > 0$.

$$\text{supp } \psi_\lambda \cdot \omega \subset \underbrace{\text{supp } \psi_\lambda}_{\subset O_\lambda} \cap \underbrace{\text{supp } \omega}_{\text{コンパクト}} \subset O_\lambda$$

したがって, $\text{supp } \psi_\lambda \cap \text{supp } \omega$ は M のコンパクト部分集合,

$\text{supp } \psi_\lambda \cdot \omega$ は M の部分集合 である。

$\text{supp } \psi_\lambda \cdot \omega$ はコンパクト。

(ii) であることが示された。

② $\bar{\gamma}$ の線型性は省略(簡単)

③ $\bar{\gamma}$ の単射性を示す:

④ $\text{Ker } \bar{\gamma} = 0$

i.e. $\forall \omega \in \Delta_c^k(\Omega)$ with $\psi_\lambda \cdot \omega = 0 \ (\forall \lambda),$
 $\omega = 0.$

$\forall \omega \in \Delta_c^k(\Omega)$ with $\psi_\lambda \cdot \omega = 0 \ (\forall \lambda) \Rightarrow \omega = 0.$

⑤ $\omega = 0$

i.e. $\forall p \in M, \omega_p = 0.$

$\forall p \in \Omega \text{ z e d.}$

① $\omega_p = 0$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_{\lambda}(p) = 1 \quad \text{is true for all } p$$

$$\omega_p = \left(\underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_{\lambda}(p)}_{=1} \right) \cdot \omega_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi_{\lambda} \cdot \omega)_p$$

is true for $\lambda \in \Lambda$ is true $\psi_{\lambda} \cdot \omega = 0$ for

for $(\psi_{\lambda} \cdot \omega)_p = 0$

is true, $\omega_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi_{\lambda} \cdot \omega)_p = 0$.

② is true for:

Theorem 14.5.1 (微分形式の積分) (再掲)

線型写像 $\int_{(\Omega, \sigma)} : \Lambda_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ $\omega \in \Lambda_c^k(\Omega, \sigma)$ 上の積分

$$\omega \mapsto \int_{(\Omega, \sigma)} \omega$$

14.5.2, 以下の条件 $(*)$ を満たす σ が $\mathbb{R}^n$ 上に存在する:

条件 $(*)$: $\forall (0, U, u) \in \mathcal{A}_{\text{conn}}, \forall \omega \in \Lambda_c^k(\mathbb{R}^n; 0) \subset \Lambda_c^k(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{(\mathbb{R}^n, \sigma)} \omega = \int_{(0, \sigma(u))} \omega$$

Def 14.3.2

Proof of Thm 14.5.1 :

① 存在

② 一意性

① 存在 ε 示可 :

線型写像 $\int_{(\Omega, \sigma)} : \Lambda_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R} \quad \varepsilon$

以下 α 線型写像 α 合成 ε 17 定義可也.

$$\Lambda_c^k(\Omega) \xrightarrow{\varepsilon} \bigoplus_{\lambda \in I} \Lambda_c^k(\Omega; O_\lambda) \xrightarrow{\bigoplus_{\lambda} \int_{(O_\lambda, \sigma(u_\lambda))}} \bigoplus_{\lambda \in I} \mathbb{R} \xrightarrow{\text{和}} \mathbb{R}$$

② 上記 $\alpha \int_{(\Omega, \sigma)} : \Lambda_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ は $\textcircled{A}$ を満たす.

i.e. $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_{\text{conn}}, \forall \omega \in \Lambda_c^k(\Omega; O) \subset \Lambda_c^k(\Omega)$

$$\int_{(\Omega, \sigma)} \omega = \int_{(O, \sigma(u))} \omega$$

$$\forall (0, U, u) \in \mathcal{A}_{\text{conv}}, \quad \forall \omega \in \Delta_c^k(\Omega; 0) \quad \varepsilon \varepsilon d.$$

$$\textcircled{\text{F.1}} \int_{(\Omega, \sigma)} \omega = \int_{(0, \sigma(u))} \omega$$

$$\forall \lambda \in \Lambda \quad \text{support } \psi_\lambda \cdot \omega \subset \text{support } \psi_\lambda \cap \text{support } \omega \subset O_\lambda \cap O.$$

$$\text{Prop 14.3.4 d)} \quad \int_{(O_\lambda, \sigma(u_\lambda))} (\psi_\lambda \cdot \omega) = \int_{(0, \sigma(u))} (\psi_\lambda \cdot \omega)$$

注意: 注意

$$\text{F.2)} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{(O_\lambda, \sigma(u_\lambda))} (\psi_\lambda \cdot \omega) = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{(0, \sigma(u))} (\psi_\lambda \cdot \omega)$$

有限和

$$= \int_{(0, \sigma(u))} \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda \right) \cdot \omega = \int_{(0, \sigma(u))} \omega = \text{F.2)}$$

1

① 注意

② 一意性 を示す:

線型写像 $S: \Delta_c^k(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ 以下 $(\star\star)$ を満たすもの:

$(\star\star) \quad \forall (0, 0, u) \in A_{\text{conn}}, \quad \forall \omega \in \Delta_c^k(\Omega; 0), \quad S(\omega) = 0.$

以下を示せば十分

$$(\overline{\text{I}}) \quad S = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i.e. } \forall \omega \in \Delta_c^k(\Omega), \quad S(\omega) = 0. \end{array} \right.$$

$$\forall \omega \in \Delta_c^m(M) \quad \text{etc.}$$

$$(\overline{\text{II}}) \quad S(\omega) = 0.$$

Cor 14.5.3 f'),

設 $(O_l, U_l, \mathcal{U}_l) \in \mathcal{A}_{\text{comm}}, \quad \omega_l \in \Lambda_c^k(\Omega; O_l) \quad (l=1, \dots, N)$

又 $\omega = \sum_{l=1}^N \omega_l$ とする。

$$S(\omega) = S\left(\sum_{l=1}^N \omega_l\right)$$

$$= \sum_{l=1}^N S(\omega_l) \quad (\because S \text{ の線型性})$$

$$= 0 \quad (\because \textcircled{\star\star})$$

② 証明終了。

