幾何学特殊講義・多様幾何特論C

担当：奥田隆幸

成績：レポート2回（詳細は未定）

参考文献：

竹内勝，"現代の球関数"，岩波.

小林俊行，大島利雄，"リー群と表現論"，岩波.

J. Wolf，"Harmonic analysis on commutative spaces"，AMS.

坂内英一，坂内悦子，伊藤達郎
"代数的組合せ論入門"，共立

Section 1：講義概要

内容：有限またはコンパクトな
等質空間上のフーリエ解析
およびその組合せ論への応用

Section 1.1：等質空間

等質空間：位相群が推移的に
作用している位相空間

⇝ どの2点もお互い"対等"

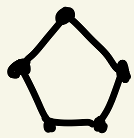
例： 群 ↷ 空間

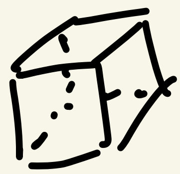
$SO(n) \ltimes \mathbb{R}^n$　　n次元ユークリッド空間 (非コンパクト)

$SO(2)$　　円周

$SO(3)$　　球面

$\mathbb{Z}$　　$\mathbb{Z}$ (非コンパクト)

$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$　　 の頂点集合

$\mathfrak{S}_3 \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$　　 の頂点集合

注：この講義ではコンパクトなものに絞って紹介する.

Section 1.2 : フーリエ解析

関数を大域的に理解したい!

↳ 積分論

↳ 微分方程式

↳ 他分野への応用

フーリエ解析のアイディア

関数を簡単な関数たちの

一次結合で近似できれば

うれしい!

例：フーリエ級数展開

- 周期 2π の周期関数（複素数値）

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ を考える．

$(\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, f(x+2n\pi) = f(x))$

- f を $\{ e^{\sqrt{-1}kx} \}_{k \in \mathbb{Z}}$ の一次結合で近似する．

$e^{\sqrt{-1}kx} = \cos kx + \sqrt{-1} \sin kx$

$$f(x) \fallingdotseq \underbrace{\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{\sqrt{-1}kx}}_{f\text{のフーリエ級数}} \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

- 数列 $\{a_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ が f の大域的な情報を持っている．

注：複素数値にしたのは線型代数が簡単になるため．

実は…

フーリエ級数展開

$\overset{\text{対応}}{\Longleftrightarrow}$　SO(2) ↻ {円周上の関数} の表現論

この講義では

$\begin{cases} \text{コンパクト群 } G \\ \text{等質 } G \text{ 空間 } M \end{cases}$　について

G ↻ {M上の関数} の表現論

（M上のフーリエ解析）

を紹介する.

注：この講義では M は"無重複"な場合のみ扱う.

Section 2.3 : フーリエ解析の組合せ論への応用

この講義ではコンパクト等質空間の
"点配置の組合せ論"に
フーリエ解析が応用されることを紹介する.
(Delsarte 理論)

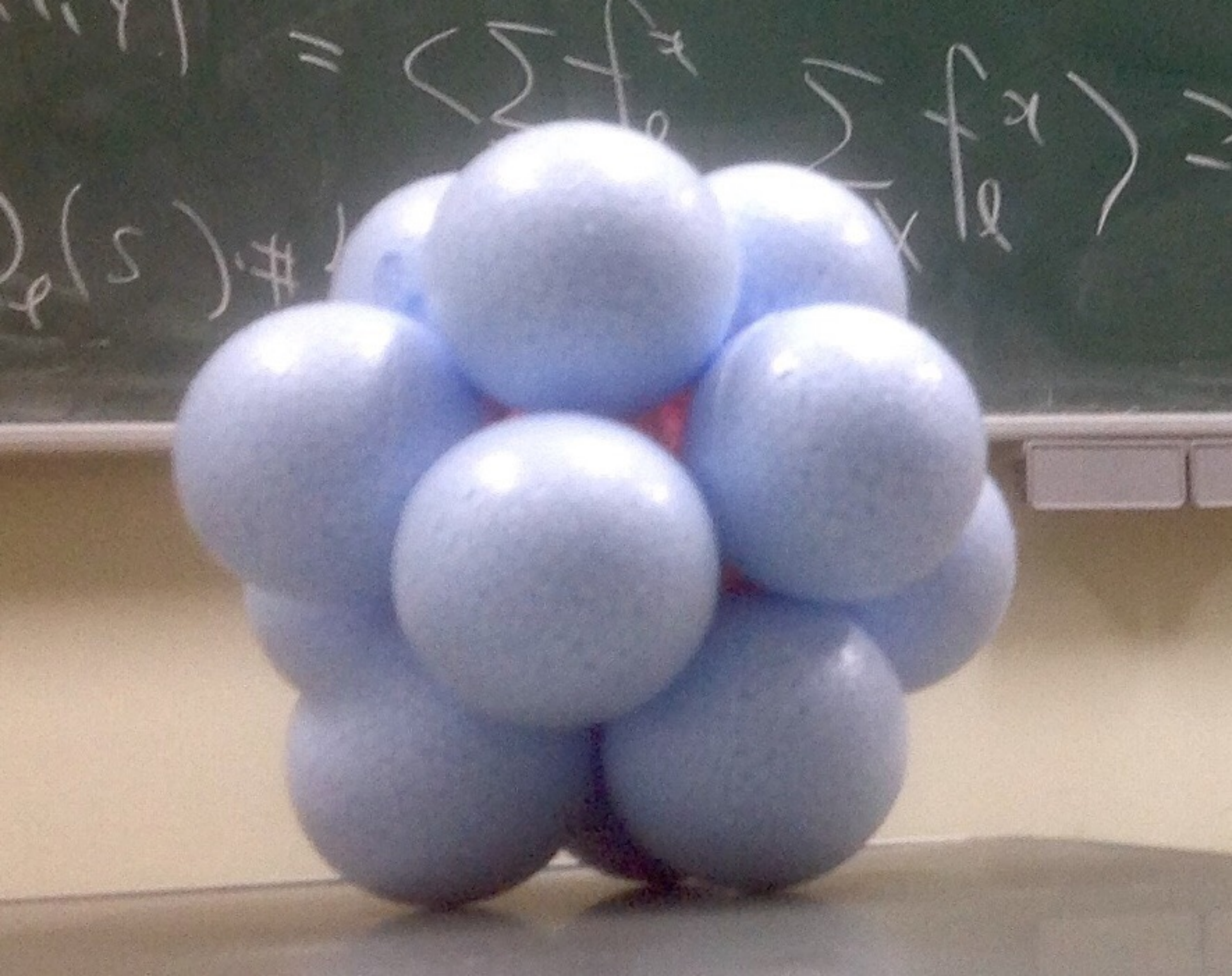
例：接吻数問題

設定：同じ大きさのボールがたくさんある．

1つのボールAを固定し，他のボールをAにくっつけていく．

ボール同士がめりこんだり，へこんだりしないものとする．

問：最大何個まで同時にAにくっつけられる？




1
日本国
一円

Def: 全空間が $\mathbb{R}^n$ の場合の
"最大ボールくっつけ可能個数" を
n 次元接吻数といい,
$\tau(n)$ と書く.

$\tau(2) = 6$: easy

$\tau(3) = 12$: Schütte - van der Werden (1950's)

$\tau(4) = 24$: O. Musin (2008)

$\tau(8) = 240$
$\tau(24) = 196560$] Levenshtein, Odlyzko - Sloane (1979)

他の n については未解決!

この講義では "$\tau(8) \leq 240$"

を7次元球面上のフーリエ解析

を用いて示す.

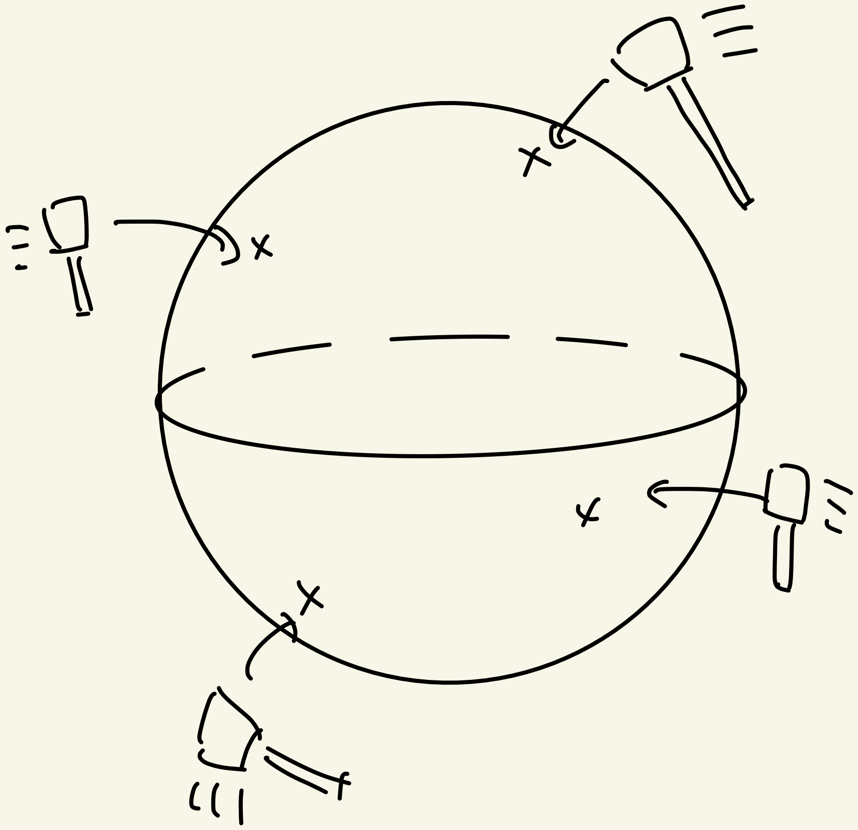
アイデア：もし $\tau(8) \gneq 240$ なら

$\tau(8)$人で同時にうまく

7次元球面をたたくと

負のエネルギーを持った音が出る

→ 矛盾



㊍講義予定

Part I： 有限等質空間

内容： 有限等質空間の定義と例

有限群の表現論

無重複有限等質空間上のフーリエ解析

組合せ論への応用

レポート①

Part II： コンパクト等質空間

内容：コンパクト等質空間の定義と例

コンパクト群の表現論

無重複コンパクト等質空間上のフーリエ解析

組合せ論への応用

レポート②