# 当面の目標

$$
\begin{cases}
G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \ : \text{有限巡回群} \\
M := \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} : \\
\qquad\qquad \text{正}n\text{角形の頂点集合} \\
G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M \ : \text{回転作用}
\end{cases}
$$

この場合の

$M$ 上のフーリエ解析を学ぶ.

# Section 2 : Homogeneous sets

## Section 2.1 : 群作用

設定 : $G$ : 群

$M$ : 集合

**Def 2.1.1 :**

$\mathfrak{S}_M := \{ \sigma : M \to M \mid$ 全単射 $\}$

**Prop 2.1.2 :**

$\mathfrak{S}_M$ は "写像の合成" に関して群をなす.

## Def 2.1.3

群準同型

$$\varphi : G \to \mathfrak{S}_M$$

を $G$ の $M$ 上の作用と呼ぶ

（左作用）

記号

- $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$ のように書いたら
  "$\varphi$ は $G$ の $M$ 上の作用"
  という意味

- 各 $g \in G$, 各 $p \in M$ について

$$g \cdot p := g \cdot_{\varphi} p := (\varphi(g))(p) \in M$$

と書く.

$\varphi$ が明らかなときは略す

Prop 2.1.4 : 作用 $\varphi : G \to \mathfrak{S}_M$ について

(1) $\forall g, h \in G,\ \forall p \in M,$

$$(g \cdot h) \underset{\varphi}{\cdot} p = g \underset{\varphi}{\cdot} (h \underset{\varphi}{\cdot} p)$$

Gの積

(2) $\forall p \in M,\quad e \underset{\varphi}{\cdot} p = p$

Gの単位元

## Prop 2.1.5

写像 $\Phi : G \times M \to M$ が以下(i),(ii)

$(g, p) \mapsto g \underset{\Phi}{\cdot} p$ を満たすとする.

(i) $\forall g, h \in G$, $\forall p \in M$,

$$(g \cdot h) \underset{\Phi}{\cdot} p = g \underset{\Phi}{\cdot} (h \underset{\Phi}{\cdot} p).$$

(ii) $\forall p \in M$, $e \underset{\Phi}{\cdot} p = p$.

このとき $\hat{\Phi} : G \to \mathfrak{S}_M$, $g \mapsto g \underset{\Phi}{\cdot} -$

は well-defined で作用となる.

## Thm 2.1.6

$\{ \varphi : G \to \mathfrak{S}_M \mid \text{作用} \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{ \Phi : G \times M \to M \mid \text{(i), (ii)} \}$

# Section 2.2 : Homogeneous sets.

設定 : $G$ : 群

**Def 2.2.1 :**

集合 $M$ と作用 $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$ の組

組 $(M, \varphi)$ を $G$-set と呼ぶ

$\varphi$ が明らかな場合は

単に "$M$ は $G$-set"

のように書く.

## Def 2.2.2

（推移的）

作用 $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$ が transitive

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall} p, q \in M, {}^{\exists} g \in G$

s.t. $g \cdot_{\varphi} p = q$

## Def 2.2.3

G-set $(M, \varphi)$ が

homogeneous （等質）

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$ が transitive.

## Ex 2.2.4:

$$G := SO(2)$$
$$:= \{ R(\theta) \mid \theta \in \mathbb{R} \} \subset M(2;\mathbb{R})$$

とする.

ただし 各 $\theta \in \mathbb{R}$ について

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

$G$ は行列の積について群をなす.

また $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$

とおく.

$$
\begin{array}{ccc}
G \times M & \longrightarrow & M \\
\rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
\left(R(\theta), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
\end{array}
$$

行列の積

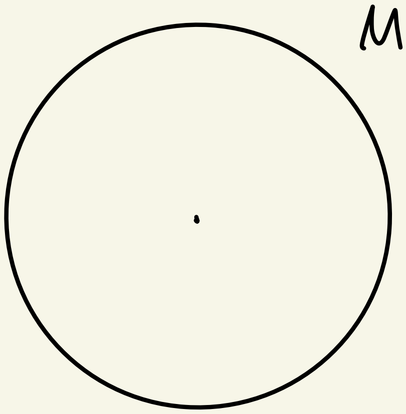
とおくと Prop 2.1.5 の (i), (ii) を満たすので G の M への作用

$$
\begin{array}{cccc}
\varphi : & G & \to & \mathfrak{S}_M \\
& \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\
& R(\theta) & \longmapsto & \left( M \to M,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto R(\theta)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)
\end{array}
$$

が定まる.

$G \ni R(\theta)$

$\varphi \circlearrowright M$ を $\theta$ 回転 (反時計)




Claim: $(M, \varphi)$ は homogeneous

i.e. 作用 $G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$ は transitive

∵) 示) $\forall p, q \in M, \exists g \in G, g \cdot p = q$.

$p, q \in M$ を任意にとる.

$$p = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix}$$

と書ける ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$)

$\theta = \beta - \alpha$ とし, $g := R(\theta) \in G$

とおけばよい (以下略) ∎

## Ex 2.2.5

$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ : 有限巡回群

$= \{ [t]_n \mid t \in \mathbb{Z} \}$

$M := \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$ : 正n角形の頂点集合 とする.

写像

$G \times M \to M$ (cf. Ex 2.2.4)

$\left( [t]_n, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \mapsto R\left(2\pi \frac{t}{n}\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

行列の積

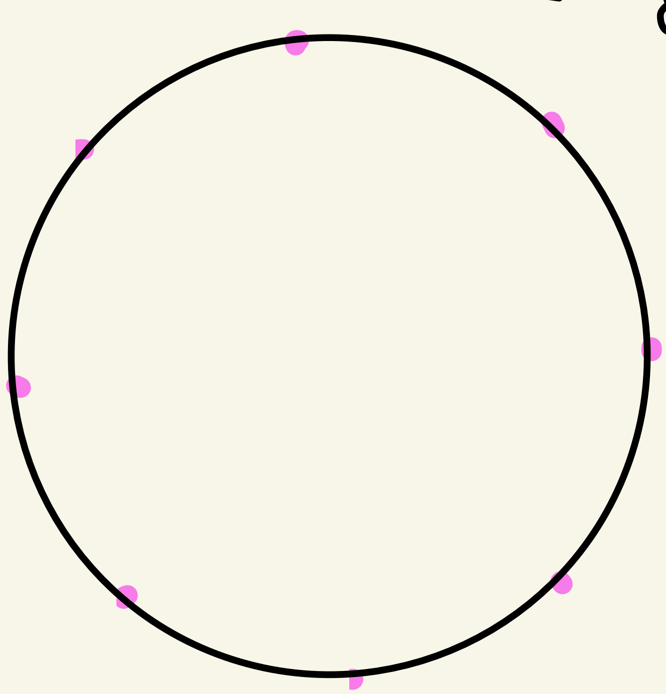
は well-defined であり,

作用 $G \curvearrowright^{\varphi} M$ を定める.

$(n=8)$

$G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z} \ni [t]_n$ 反時計

$\varphi \circlearrowright$ $2\pi \frac{t}{8}$ 回転



このとき $(M, \varphi)$ は homogeneous.