当面の目標

$$\begin{cases} G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} & \text{: 有限巡回群} \\ M := \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi\frac{k}{n} \\ \sin 2\pi\frac{k}{n} \end{pmatrix} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} & \text{: 正 } n \text{ 角形の頂点集合} \\ G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M & \text{: 回転作用} \end{cases}$$

この場合の

M 上のフーリエ解析を学ぶ.

Section 3 : Finite dimensional unitary representations.

内容

- 有限次元ユニタリ表現
- 既約分解
- Finite G-set 上の regular representations
- $(G, M) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},$ 正n角形の頂点集合$)$ の場合の regular representation の既約分解

Section 3.1 : Finite dim'l Hilbert sp/$\mathbb{C}$

設定 : V : a finite dim'l vector sp/$\mathbb{C}$

Def 3.1.1

写像 $g : V \to \mathbb{C}$ が anti $\mathbb{C}$-linear

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad g(av + bw) = \bar{a}\, g(v) + \bar{b}\, g(w)$$

複素共役

$$\left(\begin{array}{l} {}^{\forall} a, b \in \mathbb{C} \\ {}^{\forall} v, w \in V \end{array} \right)$$

Def 3.1.2 :

$(\ , \ ) : V \times V \to \mathbb{C}$ が

(Hermitian) innerproduct on V

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

Sesqui-linear

- $\forall v \in V$,

  $(\sqcup , v)_V : V \to \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$-linear

  $w \mapsto (w, v)$

  $(v, \sqcup)_V : V \to \mathbb{C}$ は anti-$\mathbb{C}$-linear

  $w \mapsto (v, w)$

Skew-symmetric

- $(v, w)_V = \overline{(w, v)_V}$ ← 複素共役

  $(\forall v, w \in V)$

Positive

- $(v, v)_V \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (\forall v \in V)$
- $(v, v)_V = 0 \Leftrightarrow v = 0$

記号 $\|v\|_V := \sqrt{(v, v)_V} \quad (v \in V)$

Def 3.1.3 :

$(\, , \,)_V$ を Herm. innerproduct on V とする.

組 $(V, (\, , \,)_V)$ を finite dim'l Hilbert sp / $\mathbb{C}$ とよぶ.

Ex 3.1.4: M を finite set とする.

$\mathbb{C}^M := \{ f : M \to \mathbb{C} \}$

M 上の $\mathbb{C}$-valued fct 全体

は 関数の和, スカラー倍 について

$(\# M)$-dim'l vector sp $/ \mathbb{C}$ となる.

$(\, , \,)_M : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}$ を

各 $f, h \in \mathbb{C}^M$ について

$$(f, h)_M := \sum_{p \in M} f(p) \cdot \overline{h(p)}$$

の 複素共役

と定める.

このとき $(\mathbb{C}^M, (\, , \,)_M)$ は

$(\# M)$-dim'l Hilbert sp $/ \mathbb{C}$

Section 3.2: Unitary groups

設定: $(V, (\ ,\ )_V)$:

a finite dim'l Hilbert sp/$\mathbb{C}$

記号:

$\mathrm{End}(V) := \{ A : V \to V \mid \mathbb{C}\text{-linear} \}$

Def 3.2.1:

$g \in \mathrm{End}(V)$ が unitary w.r.t. $(\ ,\ )_V$

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ g は $(\ ,\ )_V$ を保つ

i.e. $(gv_1, gv_2)_V = (v_1, v_2)_V$

$(\forall v_1, v_2 \in V)$

Def 3.2.2: The unitary group of $(V, (\ ,\ )_V)$

$$U(V) := U(V, (\ ,\ )_V)$$
$$:= \{ g \in \mathrm{End}(V) \mid g \text{ は unitary w.r.t. } (\ ,\ )_V \}$$

Prop 3.2.3:

$U(V)$ は写像の合成について群をなす.

Hint:

Claim: unitary $g : V \to V$ は全単射

- 単射: $(\ ,\ )_V$ の positivity から従う
- 全射: V が finite dim なので単射性から従う.

Section 3.3: Finite dim'l unitary representations

設定: G : a group

$(V, (\ ,\ )_V)$: a fin. dim'l Hilbert sp/$\mathbb{C}$

記号: $U(V)$: the unitary group of $(V, (\ ,\ )_V)$

Def 3.3.1:

群準同型 $\rho : G \to U(V)$ を unitary G-representation on V と呼ぶ.

記号:
- $g_\rho v := (\rho(g))(v)$ $\left(\begin{array}{l} g \in G \\ v \in V \end{array}\right)$
- $G \overset{\rho}{\curvearrowright} V$: "ρ is unitary G-rep. on V" (記号の乱用)

Ex 3.3.2 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を fix.

$$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ [k]_n \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$$V = \mathbb{C}$$

$$(,) : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (z_1, z_2) \mapsto z_1 \overline{z_2}$$

とする.

このとき 各 $\ell \in \mathbb{Z}$ について

$$\begin{aligned} \chi_\ell : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} &\to U(\mathbb{C}) \\ \in \quad & \quad \in \\ [k]_n &\mapsto \chi_\ell([k]_n) : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ & \qquad\qquad z \mapsto e^{2\pi \frac{k\ell}{n} \sqrt{-1}} z \end{aligned}$$

は unitary $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-rep on $\mathbb{C}$ を定める.

Ex 3.3.3

設定： G : a finite group

(M, φ) : a finite G-set

記号： $(\mathbb{C}^M, (\ ,\ )_M)$: the Hilb. sp/$\mathbb{C}$ of fcts on M (cf Ex 3.1.4)

$U(\mathbb{C}^M)$: the unitary group of $(\mathbb{C}^M, (\ ,\ )_M)$

各 $g \in G$, 各 $f \in \mathbb{C}^M$ について

$g \cdot f : M \to \mathbb{C},\ p \mapsto f(g^{-1} \cdot_\varphi p)$

とおく.

このとき

$$\begin{aligned}\rho_\varphi : G &\to U(\mathbb{C}^M)\\ g &\mapsto \rho_\varphi(g) : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M\\ &\qquad\qquad f \mapsto g \cdot f\end{aligned}$$

は unitary G-rep. on $\mathbb{C}^M$ を定める.

この ρ_φ を

the regular G-representation for (M, φ)
(正則表現)

とよぶ.

Section 3.4 : Subrepresentations

設定 : G : a group

$(V, (\ ,\ )_V)$: a finite dim'l Hilbert sp/$\mathbb{C}$

ρ : a unitary G-rep. on V

Def 3.4.1 : W : a subsp of V.

W が G-stable

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall w \in W, \forall g \in G,$

$$g \cdot_\rho w \in W$$

Prop 3.4.2 : W : a G-stable subsp of V.

$$\rho|_W : G \to U(W) \quad \text{は}$$
$$g \mapsto \rho(g)|_W$$

unitary G-rep. on W を定める.

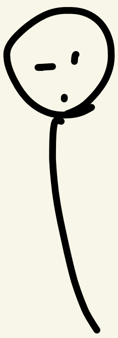
Def 3.4.3 : ρ が irreducible

$\overset{\iff}{\text{def}}$ G-stable subsp of V が V or $\{0\}$ に限る.

Observation 3.4.4 : 1-dim'l unitary G-rep は irreducible

Ex 3.4.5 : Ex 3.3.2 の unitary $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$-rep. χ_ℓ は irred.

Ex 3.4.6 : Ex 3.3.3 の regular rep. は $\# M \geq 2$ なら irred. では ない.



$\{$constant fcts on $M\}$ は ρ_φ-stable だが $\{0\}$ でも $\mathbb{C}^M$ でもない.

Section 3.5 : Direct sum decompositions

設定 : G : a group.

V : a finite dim'l Hilbert sp $/\mathbb{C}$.

ρ : a unitary G-rep. on V.

$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: a finite family of non-zero $\mathbb{C}$-subsp of V.

Def 3.5.1 :

$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が V の orthogonal direct sum decomposition (直交直和分解)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ with $\lambda_1 \neq \lambda_2$

$V_{\lambda_1} \perp V_{\lambda_2}$ in V ← 直交

(ii) $V = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$

i.e. $\forall v \in V$, $\exists ! (v_\lambda)_{\lambda\in\Lambda} \in \prod_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda$

$v = \sum_{\lambda\in\Lambda} v_\lambda$

$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が orthogonal direct sum decomp. of V とする.

Def 3.5.2:

各 $\lambda\in\Lambda$ について V_λ が G-stable であるとき,

$\{\rho_\lambda := \rho|_{V_\lambda}\}$ を　または単に $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

orthogonal direct sum decomposition of ρ

と呼ぶ.

特に 各 $\lambda\in\Lambda$ について

ρ_λ が irreducible のとき

$\{\rho_\lambda := \rho|_{V_\lambda}\}$ を　または単に $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を

irreducible decomposition of ρ

と呼ぶ

Thm 3.5.3 : 任意の finite dim'l unitary rep.

└ について, irred. decomp は存在する.

Lemma 3.5.4 : G-stable subsp の

└ 直交補空間は G-stable.

Proof of Thm 3.5.3 :

Lemma 3.5.4 を使って

次元についての帰納法 ∎

Remark: Irred. decomp は
一意とは限らない

Def 3.5.5: Irred. decomp が一意となる
unitary rep. を multiplicity-free
という。 (無重複)
("重複度"の概念を後で導入する)

Theorem 3.5.6:
Finite dim'l unitary rep. ρ on V について
以下の二条件は同値
(i) ρ は multiplicity-free
$\Updownarrow$
(ii) $\forall V_1, V_2$: irreducible G-stable subspaces in V
$V_1 \perp V_2$ or $V_1 = V_2$.

Ex 3.5.7:

$$G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{ [k]_2 \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$$V := \mathbb{C}^2$$

$$\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)_V := a\bar{c} + b\bar{d}$$

$$(a, b, c, d \in \mathbb{C})$$

$$[k]_2 ; \rho \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \\ (-1)^k b \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{Z},\ a, b \in \mathbb{C})$$

として

unitary $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-rep. on $\mathbb{C}^2$ を定める.

このとき
$$V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, a \in \mathbb{C} \right\} \subset \mathbb{C}^2$$
$$V_{-1} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, b \in \mathbb{C} \right\}$$

とすると どちらも G-stable であり,

$\{ \rho_1, \rho_{-1} \}$ は ρ の irred. decomp.

この ρ は multiplicity-free.

Ex 3.5.8 :

Ex 3.5.7 の設定で

$$[k]_2 \cdot \tau \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \left(\begin{array}{l} k \in \mathbb{Z}, \\ a, b \in \mathbb{C} \end{array} \right)$$

として

unitary $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ - rep. on $\mathbb{C}^2$

を定める. $\left(\text{つまり } \begin{array}{l} \tau : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to U(\mathbb{C}^2) \\ \quad g \mapsto \mathrm{id}_{\mathbb{C}^2} \end{array} \right)$

このとき τ は multiplicity - free ではない.

Hint : $V_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}$

$V_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\}$

$W_1 := \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{C} \right\}$

$W_2 := \left\{ \begin{pmatrix} b \\ -b \end{pmatrix} \middle| b \in \mathbb{C} \right\}$

Ex 3.5.9 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ [k]_n \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\} :$$

正n角形の頂点集合

$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$: Ex 2.2.5 で定義したもの

とする.

ゴール:

ρ_φ : the regular G-rep. on $\mathbb{C}^M$

の irred. decomp を与えよ!

各 $l \in \mathbb{Z}$ について

$$V_l := \left\{ f : M \to \mathbb{C} \;\middle|\; f\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k+1}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k+1}{n} \end{pmatrix} = e^{2\pi \frac{l}{n}\sqrt{-1}} f\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \right\}$$

for any $k \in \mathbb{Z}$

とおく.

Thm 3.5.9 :

① 各 $l \in \mathbb{Z}$ について $\dim V_l = 1$

かつ V_l は G-stable.

② $\{V_l\}_{l=0,\cdots,n-1}$ は $\mathbb{C}^M$ の orthogonal direct sum decomp.

$(V_l = V_{n+l})$

特に $\{ \rho_l := \rho|_{V_l} \}_{l=0,\cdots,n-1}$ は ρ_φ の irred. decomp.

Thm 3.5.10:

ρ_φ は multipilcity-free.

(後で一般論を用いて示す)

Remark:

Finite homogeneous G-set (M,φ) の regular G-rep. ρ_φ は multiplicity-free とは限らない!

後で

ρ_φ が multiplicity-free となるための (M,φ) についての十分条件を紹介する.