Section 4 : Delta functions and reproducing kernels on finite sets.

設定 : M : a finite set.

$\mathbb{C}^M := \{ f : M \to \mathbb{C} \}$

$(\, , \,)_M : \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}$

$(f, h) \mapsto \sum_{p \in M} f(p) \overline{h(p)}$

$V \subset \mathbb{C}^M$: a subsp $/ \mathbb{C}$

内容 : • Delta functions in V

• The Reproducing kernel of V

Section 4.1: Delta functions.

Def 4.1.1: 各 $p \in M$ について

$$\begin{aligned} ev_p : \mathbb{C}^M &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

また:

$$\begin{aligned} ev_p^V : V &\to \mathbb{C} \\ f &\mapsto f(p) \end{aligned}$$

$$\parallel$$

$$(ev_p)|_V$$

Prop 4.1.2: $ev_p^V : V \to \mathbb{C}$ は linear$/\mathbb{C}$

Thm 4.1.3 : 各 $p \in M$ について

$\exists ! \, \delta_V^p \in V$ s.t. (the delta function at p in V)

$\forall f \in V, \ (f, \delta_V^p)_M = f(p)$

Proof of Thm 4.1.3 :

Def 4.1.4 :

$V^\vee := \{ g : V \to \mathbb{C} \mid \text{linear}/\mathbb{C} \}$

← a vector sp/$\mathbb{C}$

Prop 4.1.5 : The Riezs representation theorem

$V \xrightarrow{\sim} V^\vee$ は 全単射

$v \mapsto (\sqcup, v)_M$ (anti $\mathbb{C}$-linear)

Prop 4.1.5 より $ev_p^\vee = (\sqcup, \delta_V^p)$ in $V^\vee$

となる $\delta_V^p \in V$ が一意に存在. ∎

Prop 4.1.6 :

$N := \dim V$.

$\{e_1, \cdots, e_N\}$: an onb of V とする.

($e_i : M \to \mathbb{C}$ に注意)

このとき 各 $p \in M$ について

$$\delta_V^p = \sum_{i=1}^{N} \overline{e_i(p)} \cdot e_i$$

i.e. $\forall q \in M$,

$$\delta_V^p(q) = \sum_{i=1}^{N} \overline{e_i(p)} \cdot e_i(q)$$

Proof of Prop 4.1.6 :

$p \in M$ を fix

$\delta_V^p \in V$ なので

$$\delta_V^p = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i \quad と書ける.$$

$(a_i \in \mathbb{C})$

示) $a_i = \overline{e_i(p)} \quad (\forall i)$

$i = 1, \cdots, N$ を fix.

$$a_i = (\delta_V^p, e_i)_M \qquad \left(\{e_1, \cdots, e_N\} : \text{an onb} \right)$$

$$= \overline{(e_i, \delta_V^p)_M}$$

$$= \overline{e_i(p)}$$

∎

Ex 4.1.7:

$V = \mathbb{C}^M$ のとき、各 $p \in M$ について

$$\delta^p_{\mathbb{C}^M} : M \to \mathbb{C},\ q \mapsto \begin{cases} 1 & (q = p) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

∵ $\delta^p : M \to \mathbb{C},\ q \mapsto \begin{cases} 1 & (q = p) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$

とおく.

$\forall f \in \mathbb{C}^M$

$$(f, \delta^p)_M := \sum_q f(q)\overline{\delta^p(q)} = f(p)$$

よって $\delta^p = \delta^p_{\mathbb{C}^M}$

Ex 4.1.8　Ex 3.5.9 の設定で考えよ.

$$M := \left\{ P_k := \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}:$$

正 n 角形の頂点集合

各 $\ell \in \mathbb{Z}$ について

$$V_\ell := \left\{ f : M \to \mathbb{C} \,\middle|\, f\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k+1}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k+1}{n} \end{pmatrix} = e^{2\pi \frac{\ell}{n}\sqrt{-1}} f\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \right\}$$

for any $k \in \mathbb{Z}$

$\subset \mathbb{C}^M$

$k_0 \in \mathbb{Z}$ を fix

$$P_{k_0} = \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k_0}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k_0}{n} \end{pmatrix} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

とする.

Claim

$$\delta_{V_\ell}^{P_{k_0}} : M \to \mathbb{C}$$

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k_0}{n} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{n} e^{2\pi \frac{k-k_0}{n} \ell \sqrt{-1}}$$

pf: $f_\ell : M \to \mathbb{C}$,

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}} e^{2\pi \frac{k}{n} \ell \sqrt{-1}}$$

とすると $\{f_\ell\}$ は V_ℓ (一次元) の o.n.b.

従って Prop 4.1.6 より

$$\delta_{V_\ell}^{p_{k_0}} : M \to \mathbb{C}$$

$$p \mapsto \overline{f_\ell(p_{k_0})} \cdot f_\ell(p)$$

以下略 ▢

Section 4.2 : Reproducing Kernels

Def 4.2.1 :

$$K_V : M \times M \to \mathbb{C}$$

$$(p, q) \mapsto (\delta_V^p, \delta_V^q)_M = \delta_V^p(q) = \overline{\delta_V^q(p)}$$

the reproducing kernel

for $V \subset \mathbb{C}^M$

Prop 4.2.2 :

$N := \dim V$.

$\{e_1, \cdots, e_N\}$: an onb of V とする.

($e_i : M \to \mathbb{C}$ に注意)

$$K_V(p,q) = \sum_{i=1}^{N} \overline{e_i(p)}\, e_i(q)$$

$(\forall p, q \in M)$

Pf

Prop 4.1.6 から従う.

記号:

$V^\perp$: the orthogonal complement of V in $\mathbb{C}^M$

各 $f \in \mathbb{C}^M$ について

$f_V \in V$, $f_{V^\perp} \in V^\perp$ を

$f = f_V + f_{V^\perp}$ とするものとする.

(unique)

Thm 4.2.3:

$\forall f \in \mathbb{C}^M$, $\forall q \in M$,

$$\sum_{p \in M} f(p) K_V(p, q) = f_V(q)$$

Proof of 4.2.3:

$f \in \mathbb{C}^M$, $q \in M$ & fix

$$\sum_{p\in M} f(p)\, K_V(p,q)$$

$$= \sum_{p\in M} f(p)\, \overline{\delta_V^q(p)}$$

$$= (f, \delta_V^q)_M$$

$$= (f_V + f_{V^\perp}, \delta_V^q)_M$$

$$= (f_V, \delta_V^q)_M + (\underset{\substack{\Uparrow \\ V^\perp}}{f_{V^\perp}}, \underset{\substack{\Uparrow \\ V}}{\delta_V^q})_M$$

$$= f_V(q)$$

$\blacksquare$

Ex 4.2.4

$V = \mathbb{C}^n$ のとき

$$K_{\mathbb{C}^n}(p, q) = \begin{cases} 1 & (p = q) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

Ex 4.2.5 : Ex 4.1.8 の設定を考える.

各 $k \in \mathbb{Z}$ について

$$p_k := \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \in M$$

とおく.

Claim 各 $l \in \mathbb{Z}$ について

$$K_{V_l}(p_{k_1}, p_{k_2}) = \frac{1}{n} e^{2\pi \frac{k_2 - k_1}{n} l \sqrt{-1}}$$

$$(k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

Pf: Ex 4.1.8 より従う.

$\square$

Ex 4.2.5 のつづき

Thm 4.2.6:

$\forall f \in \mathbb{C}^M, \ \forall k \in \mathbb{Z}$

$$f = \sum_{\ell=0}^{n-1} \left(\sum_{s=0}^{n-1} f(p_s) e^{2\pi \frac{k-s}{n} \ell \sqrt{-1}} \right) \delta_{V_\ell}^{p_k}$$

Pf: $f \in \mathbb{C}^M$ を fix.

- $\mathbb{C}^M = \bigoplus_{\ell=0}^{n-1} V_\ell$
- $\dim V_\ell = 1 \quad (\forall \ell)$
- $\delta_{V_\ell}^{p} \neq 0 \quad (\forall p \in M, \forall \ell)$

より

$$f = \sum a_\ell^k \delta_{V_\ell}^{p_k} \quad (a_\ell^k \in \mathbb{C})$$

と書ける.

- $\delta_{V_\ell}^{p}(p) = 1/n$ （実は $\dfrac{\dim V_\ell}{\# M}$ と一致）

と Thm 4.2.3 に注意すると，

$$a_\ell^k = n\, a_\ell^k\, \delta_{V_\ell}^{p_k}(p_k)$$

$$= n \sum_{p \in M} f(p) K_{V_\ell}(p, p_k)$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} f(p_s)\, e^{2\pi \frac{k-s}{n} \ell \sqrt{-1}}$$

□