Section 5: Fourier analysis on regular n-gon

設定

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: 有限巡回群

$M := \left\{ P_k := \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$: 正n角形の頂点集合

$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$: 回転作用

$k_0 \in \mathbb{Z}$: Fix.

内容 : • Fourier series of $f \in \mathbb{C}^M$ at $P_{k_0} \in M$

The Plancherel theorem

Section 5.1: Fourier series of fcts on M.

記号: $J := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Ex 3.5.9 $\rightsquigarrow$ $\mathbb{C}^M = \bigoplus_{l \in J} V_l$

記号の乱用

Recall:

$$V_l := \left\{ f : M \to \mathbb{C} \;\middle|\; f\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k+1}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k+1}{n} \end{pmatrix} = e^{2\pi \frac{l}{n}\sqrt{-1}} f\begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \right\}$$

for any $k \in \mathbb{Z}$

$\subset \mathbb{C}^M$

Def 5.1.1: 各 $f \in \mathbb{C}^{n}$ について

$$\hat{f} : J \to \mathbb{C}$$

$$l \mapsto \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} f(p_s)\, e^{2\pi \frac{k_0 - s}{n} l \sqrt{-1}}$$

とおく.

($k_0 \in \mathbb{Z}$ (正確には $p_{k_0} \in M$) に依存することに注意)

Thm 5.1.2 (cf. Thm 4.2.6 その6a)

$\forall f \in \mathbb{C}^M,$

$$f = \sum_{\ell \in J} \hat{f}(\ell)\, \delta^{P_{k_0}}_{V_\ell}$$

The discrete Fourier series of f at $P_{k_0} \in M$.

特に $\quad f(P_k) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \hat{f}(\ell)\, e^{2\pi \frac{k-k_0}{n} \ell \sqrt{-1}}$

$(\forall k \in \mathbb{Z})$

Section 5.2 : The Plancherel theorem

Recall : 各 $f \in \mathbb{C}^n$ $1 \le x \le 2$

$$\hat{f} : J := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$

$$l \mapsto \frac{1}{n} \sum_{s=0}^{n-1} f(p_s)\, e^{2\pi \frac{k_0 - s}{n} l \sqrt{-1}}$$

とおいた.

Def 5.2.1 :

$$\mathbb{C}^J := \{ h : J \to \mathbb{C} \}$$

$$(h_1, h_2)_J := \frac{1}{n} \sum_{l \in J} h_1(l)\, \overline{h_2(l)}$$

$(h_1, h_2 \in \mathbb{C}^J)$

$\rightsquigarrow$ $(\mathbb{C}^J, (\ ,\ )_J)$ is finite dim'l Hilbert sp/$\mathbb{C}$

Thm 5.2.1 (The Plancherel theorem)

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^M & \to & \mathbb{C}^J \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

は isometric isomorphism

(等長同型)

i.e.

$\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}^M$

$$(f_1, f_2)_M = (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_J$$

かつ

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^M & \to & \mathbb{C}^J \\ f & \mapsto & \hat{f} \end{array}$$

は 線型同型

Pf of Thm 5.2.1 :

① ${}^\forall f_1, f_2 \in \mathbb{C}^M$

$$(f_1, f_2)_M = (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_J$$

② $\mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^J$ は 線型同型
$f \mapsto \hat{f}$

② は ① と少しのギロンで分かる

① から $\mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^J$, $f \mapsto \hat{f}$ は単射.

$\dim \mathbb{C}^M = \# M = n$

$\dim \mathbb{C}^J = \# J = n$

より 全射でもある.

(Thm 5.1.2 を使って逆写像を作ってもよい)

① を示す.

$f_1, f_2 \in \mathbb{C}^M$ を fix.

Thm 5.1.2 より

$$f_1 = \sum_{l \in J} \hat{f}_1(l)\, \delta^{P_{K_0}}_{V_l}$$

$$f_2 = \sum_{l' \in J} \hat{f}_2(l')\, \delta^{P_{K_0}}_{V_{l'}}.$$

$$(f_1, f_2)_M = \Big(\sum_{l} \hat{f}_1(l)\, \delta^{P_{K_0}}_{V_l},\ \sum_{l'} \hat{f}_2(l')\, \delta^{P_{K_0}}_{V_{l'}} \Big)_M$$

$$= \sum_{l, l'} \hat{f}_1(l)\, \overline{\hat{f}_2(l')}\, \underbrace{\left(\delta^{P_{K_0}}_{V_l}, \delta^{P_{K_0}}_{V_{l'}}\right)_M}_{= \begin{cases} 1/n & (l = l') \\ 0 & (l \neq l') \end{cases}}$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{l} \hat{f}_1(l)\, \overline{\hat{f}_2(l)} = (\hat{f}_1, \hat{f}_2)_J$$

□