Section 6 : Applications for combinatorics on M

問：正六角形の6頂点から
4つの頂点を選ぶ。
このときその4頂点の中で、
隣接している2頂点が
必ず存在することを示せ。

いろんな証明がある。
フーリエ解析的手法を紹介する。

設定

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: 有限巡回群

$M := \left\{ P_k := \begin{pmatrix} \cos 2\pi \frac{k}{n} \\ \sin 2\pi \frac{k}{n} \end{pmatrix} \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$: 正n角形の頂点集合

$G \overset{\varphi}{\curvearrowright} M$: 回転作用

Section 6.1: Qℓ

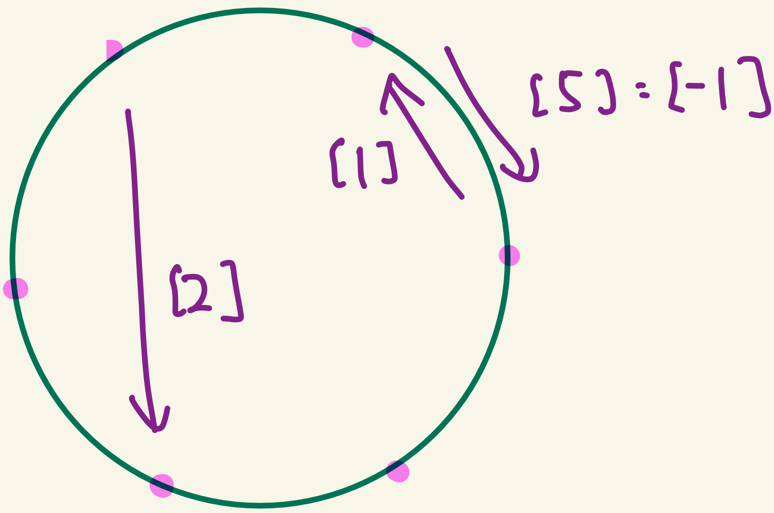
記号: $I := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{[k]_n \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Def 6.1.1:

$$R : M \times M \to I$$
$$(p_{k_1}, p_{k_2}) \mapsto [k_2 - k_1]_n$$

(距離関数モドキ)

Ex 6.1.2: $n = 6$ のとき



Thm 6.1.3 :

各 $l \in J := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ について

$\exists !\ Q_l : J \to \mathbb{C}$ s.t.

$$
\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "K_{V_l}"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C} \\
J \arrow[ur, "Q_l"'] &
\end{tikzcd}
$$

また:

$$Q_l([k]_n) = \frac{1}{n} e^{2\pi \frac{k}{n} l \sqrt{-1}}$$

$$(k \in \mathbb{Z})$$

Pf of Thm 6.1.3 : Q_ℓ の存在について

$(x, y), (x', y') \in M \times M$

with $R(x, y) = R(x', y')$

を fix

Claim $K_{V_\ell}(x, y) = K_{V_\ell}(x', y')$

$x = p_{k_1}, \ y = p_{k_2}, \ x' = p_{k_3}, \ y' = p_{k_4}$

とおく.

Ex 4.2.5 より

$$K_{V_\ell}(x, y) = K_{V_\ell}(p_{k_1}, p_{k_2}) = \frac{1}{n} e^{2\pi \frac{k_2 - k_1}{n} \ell \sqrt{-1}},$$

$$K_{V_\ell}(x', y') = K_{V_\ell}(p_{k_3}, p_{k_4}) = \frac{1}{n} e^{2\pi \frac{k_3 - k_4}{n} \ell \sqrt{-1}}.$$

いま

$$R(x, y) = [k_2 - k_1]_n$$

$$\parallel \qquad \text{より} \quad K_{V_\ell}(x, y)$$

$$R(x', y') = [k_4 - k_3]_n \qquad = K_{V_\ell}(x', y').$$

— 意性と後者の主張は略 ∎

Section 6.2 : Inner-distributions

記号： $I := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{ [k]_n \mid k \in \mathbb{Z} \}$

$$R : M \times M \twoheadrightarrow I$$
$$(p_{k_1}, p_{k_2}) \mapsto [k_2 - k_1]_n$$

Def 6.2.1： 各 $X \subset M$ $(\neq \emptyset)$ について

$\{ a_i^X \}_{i \in I}$ を

$$a_i^X := \frac{1}{(\# X)^2} \# \{ (x,y) \in X \times X \mid R(x,y) = i \} \quad (i \in I)$$

と定める.

The inner-distribution of X in $G \curvearrowright M$

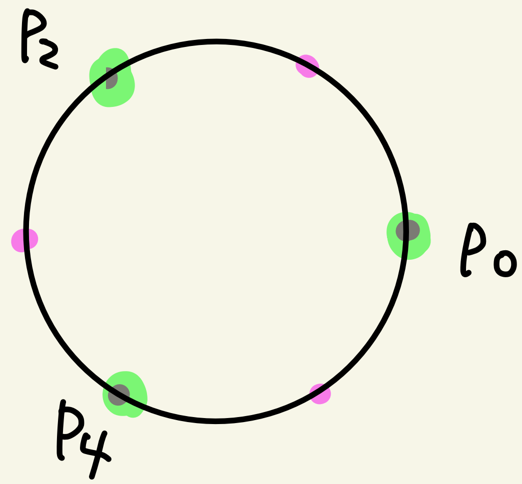
Prop 6.2.2 :

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i a_i^X = 1 \\ a_{[0]_n}^X = \frac{1}{\# X} > 0 \\ a_{[k]_n}^X = a_{[-k]_n}^X \quad (\forall k) \end{array}\right.$$

Ex 6.2.3

$n = 6$ とする.

$X := \{ p_0, p_2, p_4 \} \subset M$ とする.



このとき

$$a_i^X = \begin{cases} 1/3 & i = [0], [2], [4] \\ 0 & i = \text{otherwise} \end{cases}$$

$\because$ $i = [2]$ のとき

$$a^X_{[2]} := \frac{1}{(\# X)^2} \{ (x, y) \in X \times X \mid R(x,y) = [2] \}$$

$(\Leftrightarrow x = y)$

$$= 3/9 = 1/3$$

etc...

Thm 6.2.4 各 $\ell \in J$ について

$$\sum_{i \in I} a_i^X Q_\ell(i) \geq 0$$

Pf of Thm 6.2.4 :

$$\sum_{i \in I} a_i^X Q_\ell(i)$$

$$= \frac{1}{(\# X)^2} \sum_i \#\{(x,y) \in X \times X \mid R(x,y) = i\} Q_\ell(i)$$

$$= \frac{1}{(\# X)^2} \sum_{(x,y) \in X \times X} Q_\ell(R(x,y))$$

$$= \frac{1}{(\# X)^2} \sum_{(x,y) \in X \times X} K_{V_\ell}(x,y)$$

$$= \frac{1}{(\# X)^2} \sum_{(x,y) \in X \times X} (\delta_{V_\ell}^x, \delta_{V_\ell}^y)_\mu$$

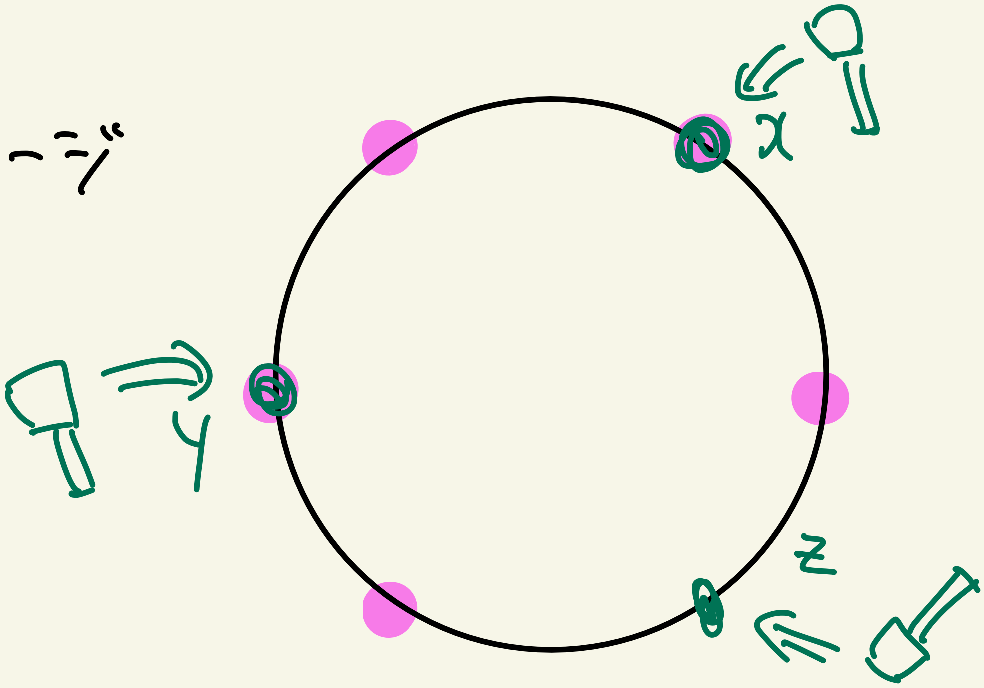
$$\Downarrow$$

$$\Downarrow$$

$$= \left(\frac{1}{\#X}\sum_{x\in X}\delta^{x}_{v_\ell} \, , \, \frac{1}{\#X}\sum_{y\in X}\delta^{y}_{v_\ell} \right)_M$$

$$= \left\| \frac{1}{\#X}\sum_{x\in X}\delta^{x}_{v_\ell} \right\|_M \geq 0 . \quad \blacksquare$$

イメージ



$$\sum_i a^x_i Q_\ell(i) = \frac{1}{(\#X)^2}\Big\| \sum_{x\in X}\delta^{x}_{v_\ell} \Big\|^2 \geq 0$$

各点を叩いて特定の周波数の音を出したときの"エネルギー"

Section 6.3 : Maximal coclique on M

$n=6$ とする.

Thm 6.3.1 :

$^{\forall}X \subset M$ with $\# X = 4$,

$$a^X_{[1]} = a^X_{[-1]} > 0$$

i.e.

正六角形の 6 頂点から 4つの頂点を選ぶ.

このとき その 4頂点の中で, 隣接している 2 頂点が必ず存在する

Pf: $X \subset M$ with $\# X = 4$ を fix.

$a^X_{[1]} = a^X_{[-1]} = 0$ を仮定する.

背理法

$4a^X_{[2]} = 4a^X_{[-2]} =: a \geq 0$

とおく.

$4a^X_{[3]} =: b \geq 0$

いま Prop 6.2.2 より

$$4a^X_{[0]} = 1$$

$$\sum_i 4a^X_i = 4$$

$$\shortparallel$$

$$1 + 2a + 2b$$

に注意.

更に Thm 6.2.4 for $\ell = 1 \in J$ より

$$\underset{\text{調整}}{24} \cdot \sum_{i \in I} a_i^x Q_1(i) \geq 0$$

$$\parallel$$

$$24 \cdot \sum_{k=0}^{5} a_{[k]}^x \frac{1}{6} e^{2\pi \frac{k}{6}\sqrt{-1}}$$

$$\parallel$$

$$\sum_{k=0}^{5} (4a_{[k]}^x) e^{2\pi \frac{k}{6}\sqrt{-1}}$$

$$\parallel$$

$$1 - a - b$$

まとめると
$$\left\{\begin{array}{l} a \geq 0 \\ b \geq 0 \\ 1 + 2a + 2b = 4 \\ 1 - a - b \geq 0 \end{array}\right. \rightsquigarrow \text{よい}$$

図

Q 一般の n について $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ 点

を考えて同じことを

この路線で示せる？

Rem 単純グラフ $\Gamma = (V, E)$ について

$E \subset \binom{V}{2}$

$X \subset V$ が coclique

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x, y \in X,\ (x, y) \notin E.$

Q : Determine

$\max\{ \# X \mid X$ は Γ の coclique $\}$.