次の当面の目標

超立方体

(ハミングスキーム $H(n,2)$)

上の Fourier analysis and applications

Section 7 : ハミングスキーム $H(n,2)$

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

Section 7.1 : $\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

記号：

$\mathfrak{S}_n$: n 次対称群

$$\mathfrak{S}_n := \{ \sigma : \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,n\} \mid \text{全単射} \}$$

$$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n := \underbrace{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}_{n\text{コ}} \quad (\text{直積群})$$

Prop 7.1.1

各 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $a = (a_1, \cdots a_n) \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

について $\sigma a := (a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(n)})$

$\in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

とおく.

このとき

$$\mathfrak{S}_n \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$

$$\sigma \mapsto (a \mapsto \sigma a)$$

は群準同型

(群への群作用)

Prop 7.1.2 集合 $\mathfrak{S}_n \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ に次の2項演算"$\bullet$"を考えると群になる.

$$(\sigma, a) \bullet (\tau, b) := (\sigma \circ \tau,\ a + \sigma b)$$

$$\left(\begin{array}{l} \sigma, \tau \in \mathfrak{S}_n \\ a, b \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \end{array} \right)$$

- 単位元は $(\mathrm{id}, 0)$
- (σ, a) の逆元は $(\sigma^{-1}, -\sigma^{-1} a)$

この群を単に

$\mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と書く.

(半直積群)

Section 7.2 $H(n,2)$

$G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

$M := \{\pm 1\}^n$ とおく.

Def 7.2.1 :

各 $(\sigma, a) \in G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

$x = (x_1, \cdots, x_n) \in M = \{\pm 1\}^n$

について

$$(\sigma, a)\, x := \left((-1)^{a_i} x_{\sigma(i)}\right)_{i=1,\cdots,n} \in M = \{\pm 1\}^n$$

と定める.

(ただし $a_i \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ について

$$(-1)^{a_i} := \begin{cases} 1 & \text{if } a_i = [0]_2 \\ -1 & \text{if } a_i = [1]_2 \end{cases}$$
)

Prop 7.2.2 : Def 7.2.1 は

$G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ の

$M := \{\pm 1\}^n$ への

推移的な作用を定める.

Pf : Check

① $((\sigma, a)\cdot(\tau, b))x = (\sigma, a)((\tau, b)x)$

$({}^\forall(\sigma, a), {}^\forall(\tau, b) \in G, {}^\forall x \in M)$

② $(\mathrm{id}, 0)x = x$

$({}^\forall x \in M)$

③ ${}^\forall x, y \in M, {}^\exists(\sigma, a) \in G$

s.t. $(\sigma, a)x = y$

② は easy

① について

$(\sigma, a), (\tau, b) \in G$, $x \in M$ を fix

$$((\sigma,a)\cdot(\tau,b))x$$

$$= (\sigma\tau, a+\sigma b)x$$

$$= \left((-1)^{a_i + b_{\sigma(i)}} x_{\sigma\tau(i)}\right)_i$$

$$(\sigma,a)\left((\tau,b)x\right)$$

$((\tau,b)x)_j$

$= (-1)^{b_j} x_{\tau(j)}$

$$= \left((-1)^{a_i}\left((\tau,b)x\right)_{\sigma(i)}\right)_i$$

$$= \left((-1)^{a_i}(-1)^{b_{\sigma(i)}} x_{\tau(\sigma(i))}\right)_i$$

$$= \left((-1)^{a_i + b_{\sigma(i)}} x_{\tau\sigma(i)}\right)_i$$

ok

③ について

以下を示せばよい ← なぜ？（レポート）

示. $^\forall x \in M,\ ^\exists (\sigma, a) \in G$ s.t.

$(\sigma, a)\underbrace{(1, \cdots, 1)}_{\in M} = x$

$x \in M$ を fix

各 $i = 1, \cdots, n$ について

$$a_i := \begin{cases} [0]_2 & \text{if } x_i = 1 \\ [1]_2 & \text{if } x_i = -1 \end{cases}$$

とおく.

このとき $(id, (a_1, \cdots, a_n)) \in G$ かつ

$(id, (a_1, \cdots, a_n))(1, \cdots, 1) = ((-1)^{a_i})_i$

$= (x_i)_i = x$

□

Def 7.2.3:

Homogeneous G-set M

$G = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$, $M = \{\pm 1\}^n$

を $H(n, 2)$ と書く.

(Hamming scheme と呼ばれるものの一種)