次の当面の目標

超立方体

(ハミングスキーム $H(n,2)$)

上の Fourier analysis and applications

Section 8 : Zonal functions.

設定： G : a finite group

M : a homogeneous G-set.

Section 8.1 : Isotropy subgroups.

Prop 8.1.1 : 各 $x \in M$ について

$$G^x := \{ g \in G \mid g \cdot x = x \} \subset G$$

は G の部分群

G の $x \in M$ における isotropy subgroup.

Ex 8.1.2 :

$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \overset{回転}{\curvearrowright} M :=$ The regular n-gon

のとき $\quad G^x = \{0\} \quad (\forall x \in M)$

$G \curvearrowright M$ は isotropy-free

(or simply-transitive)

Rem : multiplicity-free かつ

isotropy-free

$\Rightarrow$ G は可換 かつ

Fourier-transf で "簡単"

(後でみる)

Ex 8.1.3 :

Section 7

$G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \curvearrowright M := \{\pm 1\}^n$

について

$x = (1, \ldots, 1) \in M$ とおくと

$G^x = \{ (\sigma, 0) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n \}$
$(\simeq \mathfrak{S}_n)$.

Rem : この場合 $G \curvearrowright M$ は multiplicity-free

(後でみる)

だが isotropy-free ではない.

Prop 8.1.4 : $x, y \in M$ を fix
$g \in G$ with $g \cdot x = y$ を fix

このとき $G^y = g G^x g^{-1}$

Prop 8.1.5 : $x \in M$ を fix

$$G/G^x \to M \quad \text{は全単射}$$

$$gG^x \mapsto gx$$

(Homogeneous space の coset 表示)

Thm 8.1.6 (使わない)

G : a finite group.

$$\{\text{Homog. } G\text{-spaces}\}/\simeq$$

適切な同値

isotropy $\downarrow$ $\uparrow$ coset $\quad \Updownarrow$ 1:1

$$\{G \text{ の部分群}\}/\text{共役}$$

Section 8.2 : Zonal functions

設定 : $x \in M$

Def 8.2.1 : $f \in \mathbb{C}^M$ が zonal at x

この講義だけかも…

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall g \in G^x$, $g \cdot f = f$

(Ex 3.3.3)

i.e. $\forall y \in M$,

$$f(g^{-1}y) = f(y) .$$

Def 8.2.2 :

$$\mathbb{C}^M_x := \{ f \in \mathbb{C}^M \mid f \text{ is zonal at } x \}$$

$$\subset \mathbb{C}^M$$

Prop 8.2.3 :

$\mathbb{C}^M_x$ is $\mathbb{C}^M$ a subsp/$\mathbb{C}$

Prop 8.2.4 :

$x, y \in M$, $g \in G$ with $gx = y$

$(\subseteq \supset'')$

$$\mathbb{C}^M_y = g\,\mathbb{C}^M_x$$

$$= \{ g \cdot f \mid f \in \mathbb{C}^M_x \}$$

Ex 8.2.5: $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright M :=$ the regular n-gon

のとき $\mathbb{C}^M_x = \mathbb{C}^M \quad (\forall x \in M)$

Ex 8.2.6:

Section 7

$$G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n \curvearrowright M := \{\pm 1\}^n$$

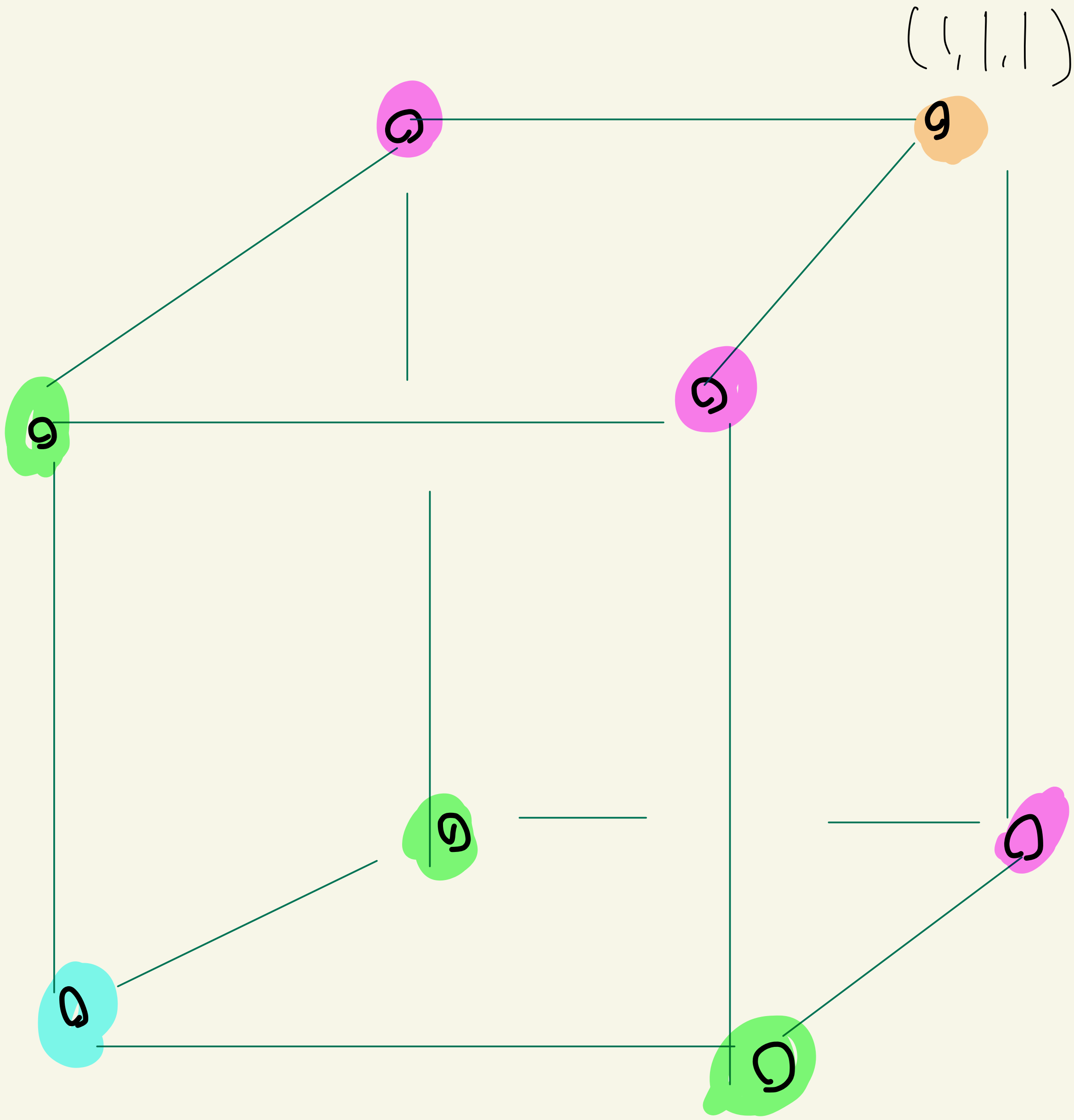
$x := (1, \cdots, 1) \in M$ のとき

$$G^x \cong \{(\sigma, 0) \mid \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$$

より

$$\mathbb{C}^M_x = \left\{ f \in \mathbb{C}^M \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall y \in \{\pm 1\}^n, \forall \sigma \in \mathfrak{S}_n \\ f(y_1, \cdots, y_n) = f(y_{\sigma(1)}, \cdots, y_{\sigma(n)}) \end{array} \right\}$$

$n = 3$ のとき



$$f \in \mathbb{C}^{M}_{(1,1,1)} \iff$$ 同じ色は同じ値

群作用についての補足定義

H を群

N を集合　　　cf.

$H \overset{\Phi}{\curvearrowright} N$ を群作用とする (Section 2)

Prop 8.2.7: N 上の2項関係

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} {}^{\exists}h \in H \text{ s.t. } h \cdot x = y$$

$$(x, y \in N)$$

は同値関係

Def 8.2.8: 上で定めた $\sim$ の各同値類

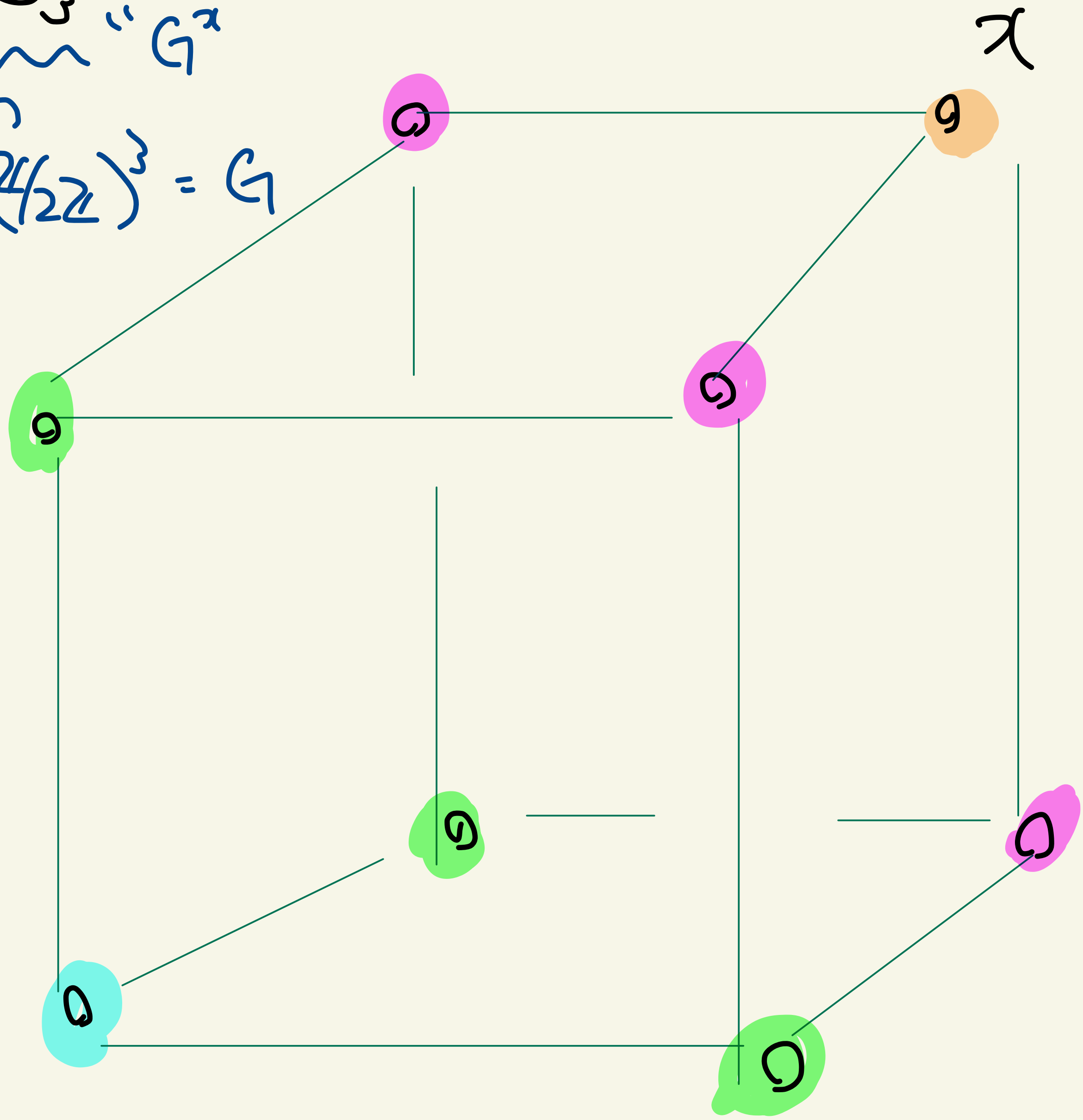
をそれぞれ H-orbit in M という.

また商集合を $H \backslash N$ (i.e. H-orbit 全体の集合) のように書く.

$\mathfrak{S}_3 \curvearrowright \{\pm 1\}^3$ について

$\underset{\sim}{\mathfrak{S}_3}$ " G^x

$\overbrace{\mathfrak{S}_3} \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3 = G$



各色 = 各 orbit

Thm 8.2.9:

$$\dim \mathbb{C}^{M}_{x} = \#(\underbrace{G^{x} \backslash M}_{\{G^{x}\text{-orbits in } M\}})$$

Pf: 各 $\underbrace{P}_{\text{a } G^{x}\text{-orbit in } M} \in G^{x} \backslash M$ について

$$\chi_P : M \to \mathbb{C},\ Y \mapsto \begin{cases} 1 & (Y \in P) \\ 0 & (Y \notin P) \end{cases}$$

とおくと

$\{\chi_P \mid P \in G^{x} \backslash M\}$ は $\mathbb{C}^{M}_{x}$ の基底となる

(詳細略)

Section 8.3 : Schurian schemes

Def 8.3.1 :

作用 $G \overset{\text{diag}}{\curvearrowright} M \times M$ を

$$g(x, y) := (gx, gy)$$

$$(g \in G,\ x, y \in M)$$

によって定める.

Def 8.3.2 :

$$I := (\operatorname{diag} G) \backslash M \times M$$

$R : M \times M \twoheadrightarrow I$ (自然な射影) とおく.

例: $i_0 := \{(x, x) \mid x \in M\} \in I$ とおく.

Def 8.3.3 :

距離関数モドキ

$(M, R : M \times M \twoheadrightarrow I)$ を

$\wr\!\wr$

a homogeneous G-space

Schurian scheme

という

Prop 8.3.4 : $R : M \times M \to I$ は diag. G-inv map

$\left(\text{i.e. } R(x,y) = R(gx, gy) \quad \forall x, y \in M,\ \forall g \in G \right)$

Prop 8.3.5

$\forall Z$: a set

$\forall F : M \times M \to Z$: a diag. G-inv map

$\left(\text{i.e. } F(x,y) = F(gx, gy) \quad \forall x, y \in M,\ \forall g \in G \right)$

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, twoheadrightarrow, "R"] \arrow[dr, "F"'] & I \arrow[d, dotted, "\exists!"] \arrow[d, "Q"'] \\ & Z \end{tikzcd}$$

(R は M×M 上の a diagonal G-inv map について universal)

Def 8.3.6 : 各 $i \in I$ について

$$k_i := \frac{\#\{(x,y) \in M \times M \mid R(x,y) = i\}}{\# M}$$

Def 8.3.7 :

$$\mathbb{C}^I := \{ f : I \to \mathbb{C} \}$$

$(\ , \ )_I$: $\mathbb{C}^I$ の Hermitian inner-prod を

$$(f, h)_I := \sum_{i \in I} f(i) \overline{h(i)} k_i$$

$(f, h \in \mathbb{C}^I)$ で定める.

Ex 8.3.8

$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \curvearrowright M :=$ the regular n-gon

の と I

$$
\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, two heads, "R"] \arrow[dr, "Q"'] & I & i_0 \arrow[d, mapsto] \\
 & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \arrow[u, phantom, "\wr"] & {[0]} \\
(p_{l_1}, p_{l_2}) \arrow[r, mapsto] & {[l_1 - l_2]} &
\end{tikzcd}
$$

i.e.

($I = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ とみなして OK)

より $k_i = 1 \quad ({}^{\forall} i \in I)$

Ex 8.3.9

$G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ と $M := \{\pm 1\}^n$ のとき.

$$M \times M \xrightarrow{R} I \qquad i_0$$

$$(x, y) \mapsto \#\{s = 1, \dots, n \mid x_s \neq y_s\} \in \{0, \dots, n\} \cong I, \qquad i_0 \mapsto 0$$

the Hamming distance

(i.e. $I = \{0, \dots, n\}$

$R(x, y) = \#\{i = 1, \dots, n \mid x_i \neq y_i\}$

と思って OK)

また $k_i = \binom{n}{i}$

Section 8.4 : $P_i(x)$

設定 : $x \in M$

記号 : $G^x := \{ g \in G \mid gx = x \}$.

Def 8.4.1 : 各 $i \in I$ について

$$P_i(x) := \{ y \in M \mid R(x,y) = i \} \subset M$$

とおく.

Prop 8.4.2 :

(1) $P_{i_0}(x) = \{x\}$

(2) $M = \bigsqcup_{i \in I} P_i(x)$

(3) $G^x \backslash M = \{ P_i(x) \mid i \in I \}$

(4) $\forall i \in I$,
$\# P_i(x) = k_i \quad \left(:= \frac{1}{\# M} \# \{ (y,z) \in M \times M \mid R(y,z) = i \} \right)$

Pf : (1), (2) は略.

(3) を示す : (2) より 以下を示せば OK.

㊙ $\forall i \in I$, $P_i(x)$ は G^x- orbit.

$i \in I$ を fix

(示) $P_i(x)$ は G^x-orbit

① $\forall g \in G^x, \forall y \in P_i(x)$

$g \cdot y \in P_i(x)$

② $\forall y_1, y_2 \in P_i(x)$,

$\exists g \in G^x, \ g \cdot y_1 = y_2$

① を示す: $g \in G^x$, $y \in P_i(x)$ を fix.

(示) $R(x, gy) = i$

(左) $= R(x, gy)$

$= R(g^{-1}x, y)$ (R は diag G-inv)

$= R(x, y)$ ($g^{-1} \in G^x$)

$= i =$ (右)

①が示された

② を示す：$y_1, y_2 \in P_i(x)$ を fix.

$$R(x, y_1) = i = R(x, y_2).$$

R の定義から

$\exists g \in G$, $(g \cdot x, g y_1) = (x, y_2)$

特に $gx = x$ かつ $g y_1 = y_2$

$\Rightarrow g \in G^x$

② が示された.

(4) を示す: $i \in I$ を fix.

示 $\# P_i(x) = k_i$

i.e. $(\# X) \cdot (\# P_i(x)) = \# \{ (x,y) \in M \times M \mid R(x,y) = i \}$

以下を示せばよい

示 $\{ (x,y) \mid x \in M,\ y \in P_i(x) \} = \{ (x,y) \mid R(x,y) = i \}$

$P_i(x)$ の定義から分かる.

∎

以下を示せばよい:

Lemma 8.4.3:

$\forall x_1, x_2 \in M$ について

$$\# \Gamma_i(x_1) = \# \Gamma_i(x_2)$$

Pf of Lemma 8.4.3

$x_1, x_2 \in M$ を fix

$g \in G$ s.t. $g x_1 = x_2$ を fix

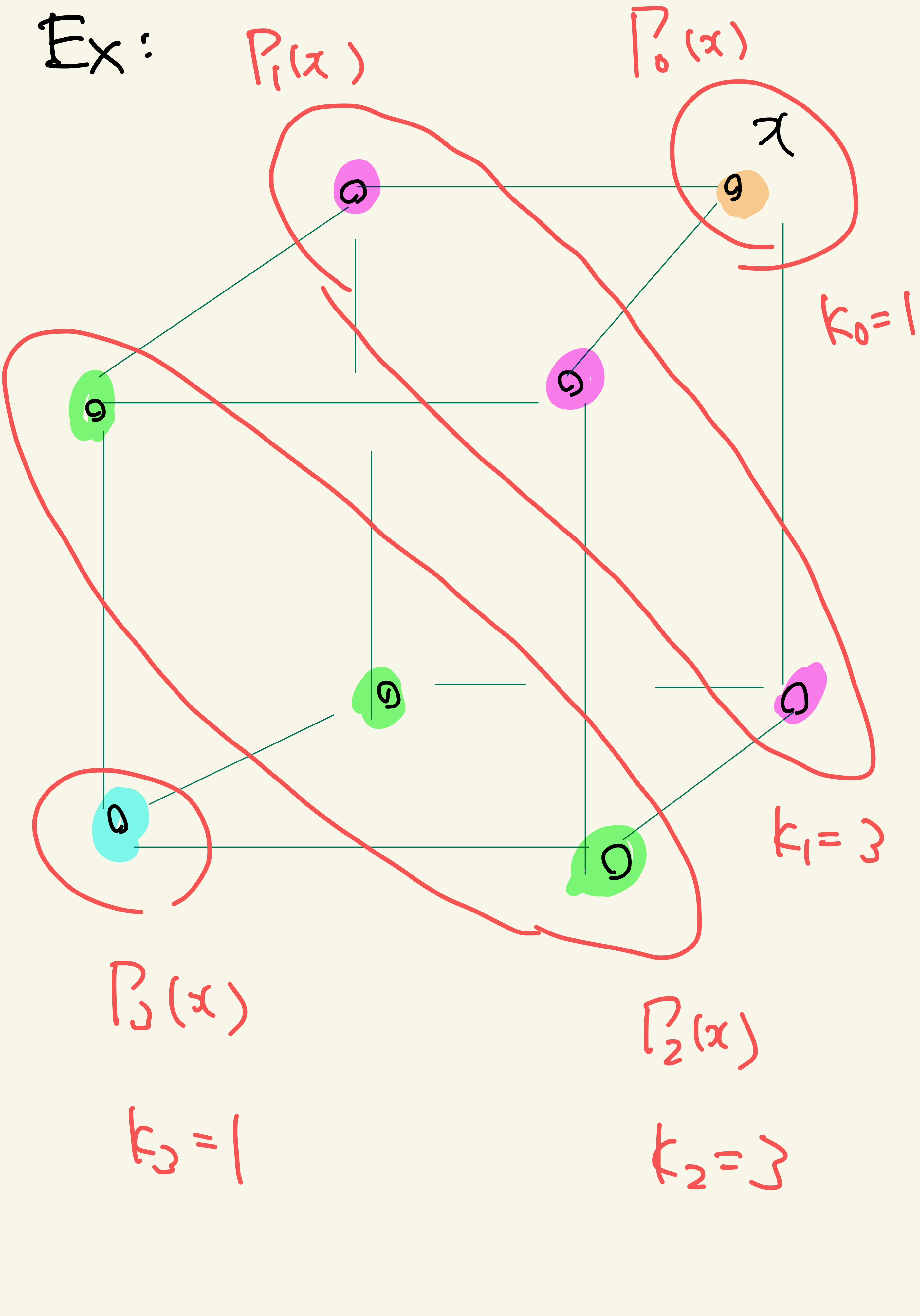
($G \curvearrowright M$: transitive)

$\overline{\pi}_1$ $\quad P_i(x_2) = g P_i(x_1)$

$$
\begin{aligned}
& y \in P_i(x_2) \\
& \iff R(x_2, y) = i \\
& \iff R(g^{-1}x_2, g^{-1}y) = i \\
& \iff R(x_1, g^{-1}y) = i \\
& \iff g^{-1}y \in P_i(x_1) \\
& \iff y \in g P_i(x_1)
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{a}}$

Ex:



Section 8.5 : $\mathbb{C}^I \simeq \mathbb{C}^M_x$

設定 : $x \in M$

記号 : $G^x := \{ g \in G \mid gx = x \}$.

Prop 8.5.1 :

各 $f \in \mathbb{C}^I$ について

$\tilde{f} : M \to \mathbb{C},\ y \mapsto f(R(x, y))$

とすると $\tilde{f} \in \mathbb{C}^M_x$.

Pf: $f \in \mathbb{C}^I$ を fix.

(示) $\tilde{f} \in \mathbb{C}^M_x$

i.e. $\forall g \in G^x,\ g \cdot \tilde{f} = \tilde{f}$

i.e. $\forall g \in G^x,\ \forall y \in M,\ \tilde{f}(g^{-1}y) = \tilde{f}(y)$.

$g \in G^x,\ y \in M$ を fix.

(左) $= \tilde{f}(g^{-1}y) = f(R(x, g^{-1}y))$

$= f(R(gx, y))$ ($\because$ R は G-inv)

$= f(R(x, y))$ ($\because g \in G^x$)

$= \tilde{f}(y) =$ (右) ∎

Thm 8.5.2 :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^I & \to & \mathbb{C}^M_x \\ f & \mapsto & \tilde{f} \end{array}$$ は linear isometric isomorphism

Pf : Check!

- 線型性
- 等長性 (→単射)
- 全射性

線型性は省略.

等長性について

示 $\forall f, h \in \mathbb{C}^I$,

$$(f, h)_I = (\tilde{\hat{f}}, \tilde{\hat{h}})_M$$

$$\text{右} = (\tilde{\hat{f}}, \tilde{\hat{h}})_M$$

$$= \sum_{y \in M} \tilde{f}(y) \overline{\tilde{h}(y)}$$

$$= \sum_{y \in M} f(R(x, y)) \overline{h(R(x, y))}$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{y \in P_i(x)} f(R(x, y)) \overline{h(R(x, y))}$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{y \in P_i(x)} f(i) h(i)$$

$$= \sum_{i \in I} f(i) h(i) k_i = \text{右}$$

Prop 8.4.2

全射性について

以下を示せばよい

(示) $\dim \mathbb{C}^{I} = \dim \mathbb{C}^{M}_{x}$

(左) $= \# I$

(右) $= \#(G^{x} \backslash M)$ (Thm 8.2.9)

Prop 8.4.2 (2) & (3)

より

$$G^{x} \backslash M = \{ \Gamma_{i}(x) \mid i \in I \} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} I$$

よって $\#(G^{x} \backslash M) = \# I$

$\blacksquare$

Ex 8.5.3 :

$H(n,2)$ の場合

$x = (1, \cdots, 1)$

$I = \{0, 1, \cdots, n\}$

$\left(k_i = \binom{n}{i} \right)$

$\mathbb{C}^I \to \mathbb{C}^M_x$

$f \mapsto \tilde{f} : M \to \mathbb{C}$

$y \mapsto \tilde{f}(\underbrace{\#\{s \mid y_s = -1\}}_{\substack{\shortparallel \\ R(x,y)}})$