当面の目標

超立方体

（ハミングスキーム $H(n,2)$ ）

上の Fourier analysis
and applications

Section 9 : Zonal functions and delta functions

設定 : G : a finite group

M : a homogeneous G-set.

記号 : $G \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{C}^M$: the regular representation

$R : M \times M \twoheadrightarrow I := (\operatorname{diag} G) \backslash M \times M$

(cf. Section 8)

Section 9.1 : Symmetric schurian scheme.

Def 9.1.1 : Schurian scheme

$(M, R : M \times M \twoheadrightarrow I)$

が symmetric

$\underset{\text{def}}{\iff}$ $\forall x, y \in M$,

$$R(x, y) = R(y, x)$$

Thm 9.1.2: $(M, R: M\times M \twoheadrightarrow I)$

が symmetric

とする.

このとき

$G \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{C}^M$ は multiplicity-free

(証明後まわし)

Recall: $G \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{C}^M$ が multiplicity-free

$\overset{\text{def}}{\iff}$ irred. decomp が一意

Ex 9.1.3: Hamming scheme $H(n,2)$

$$G = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$

$$M = \{\pm 1\}^n$$

$$\rightsquigarrow \quad I \cong \{0, \dots, n\}$$

$$R : M \times M \twoheadrightarrow I$$

$$(x, y) \mapsto \# \{ l = 1, \dots, n \mid x_l \neq y_l \}$$

は symmetric.

特に $G \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{C}^M$ は multiplicity-free

(後で irred. decomp を計算する.)

Section 9.2 : Zonal functions for Multiplicity-free cases

設定 : $x \in M$.

記号 : G^x : the isotropy subgp of G at $x \in M$

Thm 9.2.1 : 以下は同値

(i) $G \curvearrowright \mathbb{C}^M$ は multiplicity-free
(the regular rep)

$\Updownarrow$

(ii) $\forall V \subset \mathbb{C}^M$: an irred G-stable subsp,

$$\dim V^{G^x} = 1$$

ただし $V^{G^x} := \{ v \in V \mid g \cdot v = v \ \ \forall g \in G^x \}$

(証明は後まわし)

Cor 9.2.2:

$\forall V \subset \mathbb{C}^M$: an irred G-stable subsp,

$$V^{G_x} = \mathbb{C} \cdot \delta_V^x$$

(i.e. $\{\delta_V^x\}$ は V^{G_x} の基底)

Recall: $\exists! \, \delta_V^x \in V$ s.t.

$$(f, \delta_V^x)_M = f(x)$$

$$(\forall f \in V)$$

Section 9.3. J

設定： $G \curvearrowright \mathbb{C}^M$ ← the regular rep

multiplicity-free

Def 9.3.1:

$$J := \{ V \subset \mathbb{C}^M \mid \text{irred } G\text{-stable subsp} \}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{C}^M = \bigoplus_{V \in J} V$$

Thm 3.5.6

（直交直和分解）

Thm 9.3.1 :

$\{\delta_v^x\}_{v\in J}$ は $\mathbb{C}_x^M$ の基底

Pf of Thm 9.3.1 :

$$\mathbb{C}^M = \bigoplus_{v\in J} V$$

より

$$\mathbb{C}_x^M = \bigoplus_{v\in J} V^{G^x} = \bigoplus_{v\in J} \mathbb{C}\delta_v^x$$

詳細略　　Cor 9.2.2　　□

Def 9.3.3 :

各 $V \in \mathcal{J}$ について

$$m_V := \dim V$$

とおく.

Def 9.3.4:

$$\mathbb{C}^{\mathcal{J}} := \{ f : \mathcal{J} \to \mathbb{C} \}$$

$$(f_1, f_2)_{\mathcal{J}} := \frac{1}{\# M} \sum_{V \in \mathcal{J}} f_1(V) \overline{f_2(V)} m_V$$

として Herm. inner-prod

$(\ , \ )_{\mathcal{J}}$ を定める.

Thm 9.3.5:

$$\phi : \mathbb{C}^J \to \mathbb{C}_x^M$$
$$f \mapsto \sum_{v \in J} f(v)\,\delta_v^x$$

は isometric isomorphism

Pf of Thm 9.3.5:

線型性は略

全単射性は Thm 9.3.1 から従う.

$f_1, f_2 \in \mathbb{C}^J$ を fix

Claim

$$\langle f_1, f_2 \rangle_J = (\phi(f_1), \phi(f_2))_M$$

$$\text{左} = \Big(\sum_{v_1 \in J} f_1(v_1)\, \delta^x_{v_1},\ \sum_{v_2 \in J} f_2(v_2)\, \delta^x_{v_2} \Big)_M$$

$$= \sum_{v_1, v_2} f_1(v_1)\, \overline{f_2(v_2)}\, \underbrace{(\delta^x_{v_1}, \delta^x_{v_2})_M}$$

次の Prop

$\shortparallel$

$\dfrac{m_V}{\# M}$

$$= \text{右}$$

Prop 9.3.6. $V \in \mathcal{J}$, $x \in M$ とする.

$$K_V(x, x) = \frac{m_V}{\# M}$$

$$\left(\begin{array}{c} \| \\ (\delta_V^x, \delta_V^x) \\ \| \\ \delta_V^x(x) \end{array} \right)$$

証明は後まわし

Cor $\#I = \#J$

Pf $\#I = \dim \mathbb{C}^I$

$\#J = \dim \mathbb{C}^J$ に注意..

いま $\mathbb{C}^I \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^M_x$

$\mathbb{C}^J \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^M_x$ より

$\#I = \dim \mathbb{C}^I = \dim \mathbb{C}^J = \#J$

Section 9.4 : $H(n,2)$ の場合

$$G := \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$$

$$M := \{\pm 1\}$$

Def 9.4.1: $s = 1, \cdots, n$ について

$$x_s : M = \{\pm 1\}^n \to \mathbb{C}$$

$$x \mapsto x_s$$

とおく.

Remark:

- $x_s \in \mathbb{C}^M$
- $x_s^2 = 1$

記号: $[n] = \{1, \cdots, n\}$ とおく.

Def 8.4.2:

各 $S \subset [n]$ について
$\{s_1, \cdots, s_l\}$ $(s_1 < s_2 < \cdots < s_l)$

$$x_S := \prod_{k=1}^{l} x_{s_k} : M \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto \prod_{k=1}^{l} x_{s_k}$$

とおく.

ただし $S = \emptyset$ のときは

$$x_\emptyset = 1$$ とおく.

Thm 9.4.3:

$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\# M}} \chi_S \right\}_{S \subset [n]}$ は $\mathbb{C}^M$ の o.n.b.

Pf of Thm 9.4.3:

$\# \{ S \subset [n] \} = 2^n$

$= \# M = \dim \mathbb{C}^M$ に注意.

Proof

以下を示せば良い.

示 $^\forall S, S' \subset [n]$,

$$(\chi_S, \chi_{S'})_M = \begin{cases} \# M & (S = S') \\ 0 & (S \neq S') \end{cases}$$

$S, S' \subset [n]$ を fix.

Case 1 : $S = S'$ のとき.

示 $(\chi_S, \chi_S)_M = \# M$

$S = \{s_1, \ldots, s_l\}$ とおく.

$$\text{左} = \sum_{x \in M} \chi_S(x) \overline{\chi_S(x)}$$

$$= \sum_{x \in M} \prod_{k=1}^{l} x_{s_k} \cdot \overline{x_{s_k}}$$

$$= \sum_{x \in M} \prod_{k=1}^{l} 1$$

$$= \sum_{x \in M} 1 = \# M = \text{右}$$

Case 2: $S \neq S'$ のとき

示 $(\chi_S, \chi_{S'})_M = 0$

$S \setminus S' \neq \emptyset$ の場合を考える.

($S' \setminus S \neq \emptyset$ の場合も同様に証明できる)

$S = \{s_1, \cdots, s_l\}$

$S' = \{s'_1, \cdots, s'_{l'}\}$ とおく.

$s_t \notin S'$ とする.

$$(\chi_S, \chi_{S'})_M$$

$$= \sum_{x \in M} \chi_S(x)\, \overline{\chi_{S'}(x)}$$

$$= \sum_{x \in M} \prod_{k=1}^{l} x_{s_k} \prod_{k'=1}^{l'} \overline{x_{s'_{k'}}}$$

$$= \sum_{x \in M} x_{s_t} \prod_{k \neq t} x_{s_k} \prod_{k'} \overline{x_{s'_{k'}}}$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{x_{s_t} = \pm 1} x_{s_t} \right)}_{=\,0} \left(\sum_{x_1 = \pm 1} \underset{\wedge \atop x_{s_t} = \pm 1}{\cdots} \sum_{x_n = \pm 1} \prod_{k \neq t} x_{s_k} \prod_{k'} \overline{x_{s'_{k'}}} \right)$$

$s'_{k'} \neq s_t$

$$= 0$$

∎

記号：各 $\ell = 0, \cdots, n$ について

$$\binom{[n]}{\ell} := \{ S \subset [n] \mid \# S = \ell \}$$

とおく。

Def 9.4.4：

各 $\ell = 0, \cdots, n$ について

$$V_\ell := \mathrm{Span}\{ \chi_S \mid S \in \binom{[n]}{\ell} \} \subset \mathbb{C}^M$$

とおく。

Thm 9.4.5:

$$J = \{V_\ell\}_{\ell=0,\cdots,n}$$

i.e.

$\{V_\ell\}_{\ell=0,\cdots,n}$ が

$G \curvearrowright \mathbb{C}^N$ のキヤク分解

今後, 簡単のため

$$J = \{0, \cdots, n\}$$

とおく.

Pf of Thm 9.4.5

Check 項目

① V_ℓ は G-stable ($\forall \ell$)

② $\{V_\ell\}_{\ell=0,\cdots,n}$ は

$\mathbb{C}^M$ の直交直和分解

(easy)

③ 各 V_ℓ は G-rep として

既約

① について

Lemma 9.4.6

$(\sigma, a) \in \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$

$S \subset [n]$ について

$$(\sigma, a)^{-1} x_S = \left(\prod_{k=1}^{\ell} (-1)^{a_{s_k}}\right) x_{\sigma(S)}$$

① はこの Lemma から

従う.

Pf of Lemma 9.4.6

$x \in M$ を fix

右 $\left((\sigma, a)^{-1} \chi_S\right)(x)$

$$= \left(\left(\prod_{k=1}^{\ell} (-1)^{a_{s_k}}\right) \chi_{\sigma(S)}\right)(x)$$

左 $= \chi_S\left((\sigma, a)x\right)$

$$= \chi_S\left(\left((-1)^{a_t} x_{\sigma(t)}\right)_{t=1\cdots n}\right)$$

$$= \prod_k (-1)^{a_{s_k}} x_{\sigma(s_k)}$$

$$= \left(\left(\prod_k (-1)^{a_{s_k}}\right) \chi_{\sigma(S)}\right)(x)$$

$=$ 右

③ について

アイデア　$\# I = \# J$ を使う

①, ② から

$$\mathbb{C}^M = \bigoplus_{l=0}^{n} V_l \quad \cdots ①$$

また J の定義から

$$\mathbb{C}^M = \bigoplus_{V \in J} V \quad \cdots ②$$

② は ① の細分である.
(multiplicity-free)

いま $\#I = n = \#J$ なので

①と②は直和分解として

一致する。

□

Thm 9.4.6

$i \in J = \{0, \dots n\}$

$x, y \in M$ with $R(x,y) = i$

を fix

このとき 各 $l \in J = \{0, \dots, n\}$ について

$$\delta_l^x(y) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor i/2 \rfloor} \binom{i}{2k}\binom{n-i}{l-2k} - \binom{i}{2k+1}\binom{n-i}{l-2k-1}$$

$$\delta_l^x(y) \overset{\cdot\cdot}{=} \delta_{V_l}^x(y)$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s}\binom{n-i}{l-s}$$

Pf of Thm 9.4.6

$i, x, y, l \in J$ を fix.

記号 : $D_{xy} = \{ t = 1, \cdots, n \mid x_t \neq y_t \}$ とおく.

$(\# D_{xy} = i)$

$$\textcircled{\footnotesize I} = \delta_\ell^x(y)$$

$$= \frac{1}{\# M} \sum_{S \in \binom{[n]}{\ell}} \chi_S(x) \overline{\chi_S(y)}$$

cf. (Section 4)

$$= \frac{1}{\# M} \sum_{S \in \binom{[n]}{\ell}} (-1)^{\#\{k = 1 \sim \ell \mid \underbrace{x_{s_k} \neq y_{s_k}}\}}$$

$$\underbrace{\phantom{x_{s_k}}}_{\substack{\shortparallel \\ D_{xy} \cap S}}$$

$$= \frac{1}{\# M} \left(\# \left\{ S \in \binom{[n]}{\ell} \,\middle|\, \#(S \cap D_{xy}) : \text{even} \right\} - \# \left\{ S \in \binom{[n]}{\ell} \,\middle|\, \#(S \cap D_{xy}) : \text{odd} \right\} \right)$$

$$= \textcircled{\footnotesize 6}$$

Ex 9.4.7: $n=3$ のとき

$x, y \in M = \{\pm 1\}^3$

$i := R(x, y) \in \{0, 1, 2, 3\} = I$

$l \in \{0, 1, 2, 3\}$ とする.

Thm 9.4.6 より

$$\delta_l^x(y) = \frac{1}{8} \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{3-i}{l-s}$$

$$\shortparallel$$

$$\delta_{V_l}^x(y)$$

具体的に計算すると

$\ell = 0$ a is 3

$$\delta_0^x(y) = \frac{1}{8} \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \underbrace{\binom{3-i}{-s}}_{s > 0 \text{ this } 0}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$\ell = 1 \quad \alpha \quad \varepsilon Z$

$$\delta_1^x(y) = \frac{1}{8}\sum_{s=0}^{i}(-1)^s\binom{i}{s}\binom{3-i}{1-s}$$

$$= \frac{1}{8}\left(\binom{3-i}{1} - \binom{i}{1}\right)$$

$$= \frac{1}{8}(3-2i)$$

$$= \begin{cases} 3/8 & i=0 \\ 1/8 & i=1 \\ -1/8 & i=2 \\ -3/8 & i=3 \end{cases}$$

$\ell = 2 \quad \alpha \varepsilon \zeta$

$$\delta_2^{x}(y) = \frac{1}{8} \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{3-i}{2-s}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\binom{3-i}{2} - \binom{i}{1}\binom{3-i}{1} + \binom{i}{2} \right)$$

$$= \begin{cases} 3/8 & i = 0 \\ -1/8 & i = 1 \\ -1/8 & i = 2 \\ 3/8 & i = 3 \end{cases}$$

$\ell = 3$ のとき

$$\gamma_3^{i}(4) = \frac{1}{8} \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{3-i}{3-s}$$

$$= \frac{1}{8} \left(\binom{3-i}{3} - \binom{i}{1}\binom{3-i}{2} + \binom{i}{2}\binom{3-i}{1} - \binom{i}{3} \right)$$

$$= \begin{cases} 1/8 & i = 0 \\ -1/8 & i = 1 \\ 1/8 & i = 2 \\ -1/8 & i = 3 \end{cases}$$