Section 10:

Spherical Fourier transforms on finite homogeneous spaces.

設定： G : a finite group

M : a homogeneous G-space

s.t.

the regular representation

$G \curvearrowright \mathbb{C}^M$

is

multiplicity-free.

Section 10.1 : Q_V

記号 :

$I := (\mathrm{diag}\, G) \setminus M \times M$

$J := \{ V \subset \mathbb{C}^M \mid$ すなわち G-stable $\}$

設定 $V \in J$ とする.

Prop 10.1.1: 各 $x \in M$, $g \in G$ (について

$$g\,\delta_V^{x} = \delta_V^{gx}$$

Pf of Prop 10.1.1:

$h \in V \subset \mathbb{C}^M$ を fix

示 $(h, g\delta_V^{x})_M = h(gx)$

左 $= (h, g\delta_V^{x})_M = (g^{-1}h, \delta_V^{x})$

$= (g^{-1}h)(x)$

$= h(gx) =$ 右 □

Prop 10.1.2:

$K_V : M \times M \to \mathbb{C}$

再生核　　　　は diag G-inv

Pf of Prop 10.1.2:

$x, y \in M$, $g \in G$ を fix

示 $K_V(gx, gy) = K_V(x, y)$

左 $= (\delta_V^{gx}, \delta_V^{gy})_M$

$= (g\delta_V^{x}, g\delta_V^{y})_M$

$= (\delta_V^{x}, \delta_V^{y})_M =$ 右

証

Cor 10.1.3 :

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, two heads] \arrow[dr, "K_V"'] & I \arrow[d, dashed, "\exists ! Q_V"] \\ & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

(cf. Prop 8.3.5)

$Q_V \in \mathbb{C}^I$ が定義された!

$x \in M$ を fix すると

$$\mathbb{C}^I \to \mathbb{C}_x^M \quad f \mapsto \tilde{f}$$

は linear isometric isomorphism であった

(Thm 8.5.2.)

ここで

$$\tilde{f} : M \to \mathbb{C},\ y \mapsto f(R(x,y))$$

Prop 10.1.4:

この対応において

$$\tilde{Q}_v = \delta_v^x$$

Thm 10.1.5

$\left\{ \sqrt{\frac{\# M}{m_v}} Q_v \right\}_{v \in J}$ は

$\mathbb{C}^I$ の o.n.b

Proof of Thm 10.1.5

準備中

Section 10.2 : Spherical Fourier transforms

Def 10.2.1 :

各 $f \in \mathbb{C}^I$ について

$\hat{f} \in \mathbb{C}^J$ を

$$\hat{f}(v) = (f, Q_v)_I \frac{\# M}{m_v}$$

$$= \frac{\# M}{m_v} \sum_{i \in I} f(i) \overline{Q_v(i)} k_i$$

とおく.

Def 10.2.2:

$$\mathbb{C}^{I} \to \mathbb{C}^{J},\ f \mapsto \hat{f}$$

を $G \curvearrowright M$ a spherical Fourier transform と呼ぶ

Thm 10.2.3:

$$\mathbb{C}^I \to \mathbb{C}^J, \quad f \mapsto \hat{f}$$

is linear isometric

isomorphism

证:

各 $f \in \mathbb{C}^I$ $(I = xu)$

$$f = \sum_{v \in J} \hat{f}(v) Q_v$$

Pf of Thm 10.2.3:

準備中

Ex 10.2.4

$G := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$M :=$ 正 n 角形の頂点集合

$G \curvearrowright M$: 回転

の場合

$x_0 \in M$ を fix する.

$G \curvearrowright M$ が isotropy-free である

($\text{i.e.}\ \forall x \in M,\ G^x = \{e\}$)

ここから

$\theta : M \to I$ が全単射となること

$y \mapsto R(x_0, y)$ が示される.

要は:

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{C}^M_{x_0} \\
\mathbb{C}^M \arrow[urr, phantom, sloped, "\cong"] \arrow[d, "\theta^*", "\cong"'] \arrow[drr] & & \\
\mathbb{C}^I \arrow[rr] \arrow[urr, phantom, "\circlearrowleft"] & & \mathbb{C}^J
\end{tikzcd}$$

Section 5 a isometric isomorphism
(Thm 5.2.1)

Spherical Fourier transform

も言える.

Ex 10.2.5

$H(n, 2)$ について

$I \cong \{0, 1, \cdots, n\}$

$J \cong \{0, 1, \cdots, n\}$ と同一視する.

このとき 各 $i \in I$, $l \in J$ について

$$Q_l(i) = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{i} (-1)^s \binom{i}{s} \binom{n-i}{l-s}$$

(cf. Thm 9.4.6)

$n=3$ の場合を考える.

$f : I^{\{0,\dots,3\}} \to \mathbb{C}$ とおく.

$i \mapsto 4-2i$

Claim $\hat{f} : J^{\{0,\dots,3\}} \to \mathbb{C}$

$$l \mapsto \begin{cases} 8 & (l=0,1) \\ 0 & (l=2,3) \end{cases}$$

(後で使う)

$$Q_0(i) = \frac{1}{8}$$

$$Q_1(i) = \frac{1}{8}(3-2i)$$ より

$$f = 8Q_0 + 8Q_1$$

これより claim が分かる.

$n=8$ の場合を考える.

$$f : I \to \mathbb{C}$$
$$i \mapsto \frac{1}{2}(i-4)(i-8)$$

とおく.

Claim : $\hat{f} : J \to \mathbb{C}$

$$l \mapsto \begin{cases} 2^8 & (l=0,1) \\ 2^6 & (l=2) \\ 0 & (l=3,\cdots,8) \end{cases}$$

(後で使う)

$\because$

$$Q_0(i) = \frac{1}{2^8}$$

$$Q_1(i) = \frac{1}{2^8}(-2i+8)$$

$$Q_2(i) = \frac{1}{2^8}(2i^2-16i+32)$$

より

$$f = 2^8 Q_0 + 2^8 Q_1 + 2^6 Q_2$$

□