Section 11 : Delsarte's linear programming bounds for codes

問：H(3,2)から

5点とると必ず隣接する2点を含んでしまうことを示せ。

問：H(8,2)から

17点とると

必ず距離3以下の

2点を含んでしまうことを示せ。

Section 11.1 : $\mathcal{A}$ - codes

設定 : G : a finite group

M : a homogeneous G-set

s.t.

$G \curvearrowright \mathbb{C}^M$ is m.f.

$\mathcal{A} \subset I$ & fix.

$i_0 \in \mathcal{A}$

記号 : $I := (\mathrm{diag}\, G) \backslash M \times M$

Def 11.1.1

$X \subset M$ が $\mathcal{A}$-code

$\underset{\text{def}}{\iff} R(x, y) \in \mathcal{A}$

$(\forall x, y \in X)$

Ex 11.1.2:

$H(3,2)$ を考える.

$$\overset{i_0}{\overset{\shortparallel}{I}} := \{0,1,2,3\}$$

$$\cup$$

$A := \{0,2,3\}$ とする.

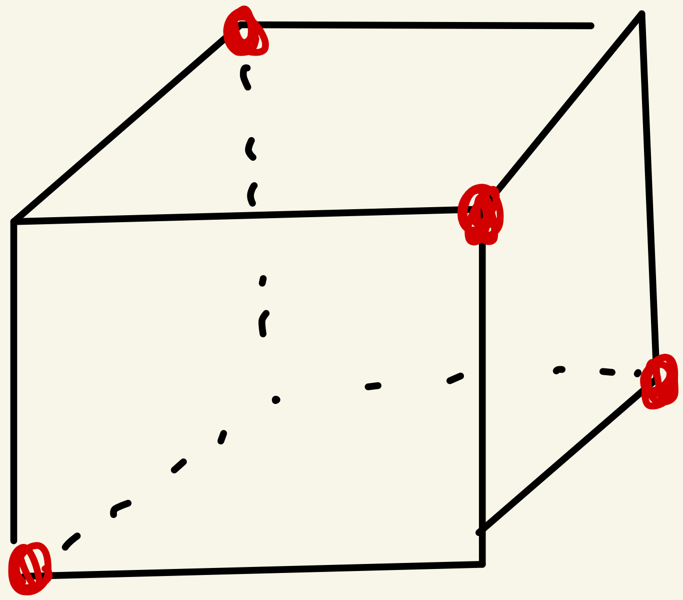
$X \subset H(3,2)$ が A-code

$\Longleftrightarrow$ $\forall x,y \in X$,

$x = y$ or $R(x,y) \geq 2$

(i.e. 隣接する2点を含まない)

H(3,2) の 4点 A-code の例



5点 A-code はあるか？

⇝ ない

(後で示す)

Ex 11.1.3 :

$H(8,2)$ を考える.

$$I \cong \{\overset{\substack{i_0 \\ \shortparallel}}{0}, \cdots\ 8\}$$

$$\cup$$

$A := \{0,4,5,6,7,8\}$ とおく.

$X \subset H(8,2)$ が A-code

$\iff$ $\forall x, y \in X$,

$$x = y \ \text{or}\ \partial(x,y) \geq 4$$

(i.e. 距離3以下の2点を含まない)

16点 A-code の例

(1を+, -1を- と表記する)

$$
X = \begin{pmatrix}
+&+&+&+&+&+&+&+\\
+&+&+&+&-&-&-&-\\
+&+&-&-&+&+&-&-\\
+&+&-&-&-&-&+&+\\
+&-&+&-&+&-&+&-\\
+&-&+&-&-&+&-&+\\
+&-&-&+&+&-&-&+\\
+&-&-&+&-&+&+&-\\
-&-&-&-&+&+&+&+\\
-&-&+&+&-&-&+&+\\
-&-&+&+&+&+&-&-\\
-&+&-&+&-&+&-&+\\
-&+&-&+&+&-&+&-\\
-&+&+&-&-&+&+&-\\
-&+&+&-&+&-&-&+\\
-&-&-&-&-&-&-&-
\end{pmatrix}
$$

このXは

E_8-code という名前がついている.

(or 拡大 Hamming [8,4,4]-code)

17点 A-code はあるか?

⇝ ない!

(後で示す)

Section 11.2: Delsarte's bounds for codes

設定: G : a finite group

M : a homogeneous G-set s.t.

$G \curvearrowright \mathbb{C}^M$ is m.f.

$i_0 \in A \subset I$ を fix.

記号: $I := (\mathrm{diag}\, G)\backslash M \times M$

$J := \{ V \subset \mathbb{C}^M \mid \text{irred } G\text{-stable} \}$

$\mathbb{C}^I \to \mathbb{C}^J,\ f \mapsto \hat{f}$

the spherical Fourier transf.

Def 11.2.1 : $V_0 := \{$定数関数$\} \subset \mathbb{C}^M$ とおく.

Prop 11.2.2 : $V_0 \in \mathcal{J}$ より

$$Q_{V_0} : I \to \mathbb{C}$$
$$i \mapsto \frac{1}{\# M}$$

(Hint : easy)

Def 11.2.3:

$$\mathcal{L}(I;A) := \left\{ f \in \mathbb{C}^I \;\middle|\; \begin{array}{l} \bullet\ f(i_0), \hat{f}(V_0) \in \mathbb{R} \\ \bullet\ f(i) \in \mathbb{R}_{\leq 0} \quad \forall i \in A \setminus \{i_0\} \\ \bullet\ \hat{f}(V) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall V \in J \setminus \{V_0\} \end{array} \right\}$$

とおく.

Thm 11.2.4 (Delsarte's bounds)

$\forall f \in \mathcal{L}(I;A)$, $\forall \emptyset \neq X \subset M$: A-code

$$(\# X)\, \hat{f}(V_0) \leq (\# M)\, f(i_0)$$

Thm 11.2.4 の証明に向けて

Key Lemma 11.2.5

$^\forall X \subset M$, $^\forall V \in J$,
$\neq \emptyset$

$$\sum_{x,y \in X} Q_V(R(x,y)) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

∵ X, V を fix

$$\sum_{x,y \in X} Q_V(R(x,y))$$

$$= \sum_{x,y \in X} K_V(x,y)$$

$$= \left(\sum_x \delta_V^x , \sum_y \delta_V^y \right)_M = \| \delta_V^x \|^2 \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

Proof of Thm 11.2.4:

$f \in \Omega(I;A)$, X : A-code を fix.

示

① $\displaystyle\sum_{x,y\in X} f(R(x,y)) \le (\#X)\, f(i_0)$

② $\displaystyle\sum_{x,y\in X} f(R(x,y)) \ge \hat{f}(V_0)\, \frac{(\#X)^2}{\#M}$

① : $\displaystyle\sum_{x,y\in X} f(R(x,y))$

$$= (\#X)\, f(i_0) + \sum_{x\neq y} f(\underbrace{R(x,y)}_{A\setminus\{i_0\}})$$

$$\le (\#X)\, f(i_0)$$

$\left(\because\ f(i) \in \mathbb{R}_{\le 0}\ \ {}^\forall i \in A\setminus\{i_0\}\right)$

② : $\sum_{x,y\in X} f(R(x,y))$

$$= \sum_{x,y\in X}\Big(\sum_{v\in J}\hat{f}(v)Q_v\Big)(R(x,y))$$

$(\because$ Thm 10.2.2$)$

$$= \sum_{v\in J}\hat{f}(v)\sum_{x,y\in X}Q_v(R(x,y))$$

$$= \hat{f}(v_0)\frac{(\#X)^2}{(\#M)} + \sum_{v\neq v_0}\hat{f}(v)\underbrace{\sum_{x,y\in X}Q_v(R(x,y))}_{\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$$

$\left(\because Q_{v_0}(i)=\frac{1}{\#M}\right)$

$$\geq \hat{f}(v_0)\frac{(\#X)^2}{(\#M)}$$

$(\because$ Lem 11.2.5$)$

$\blacksquare$

Thm 11.2.4 の証明の別の書き方 (本質は同じ)

$f \in \mathcal{C}(I;A)$, X : A-code を fix.

各 $x \in X$ について

$$h := f - \hat{f}(V_0) Q_{j_0} \in \mathbb{C}^I$$ とおく

$$\begin{cases} \hat{h}(V_0) = 0 \\ \hat{h}(V) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall V \in J \setminus \{V_0\} \end{cases}$$

に注意.

各 $x \in X$ について

$$\delta^{x}_{\sqrt{\hat{h}}} := \sum_{v \in J} \sqrt{\hat{h}(v)}\, \delta^{x}_{v} \in \mathbb{C}^{M}_{x} \subset \mathbb{C}^{M}$$

xで特定の"音"を出す　　　　とおく.

$$\delta^{X}_{\sqrt{\hat{h}}} := \sum_{x \in X} \delta^{x}_{\sqrt{\hat{h}}} \in \mathbb{C}^{M}$$ を考える.

"和音"

$$0 \leq \underbrace{\| \delta^X_{\sqrt{\hat{h}}} \|^2_\mu}_{\text{和音の“エネルギー”}}$$

$$= (\delta^X_{\sqrt{\hat{h}}}, \delta^X_{\sqrt{\hat{h}}})_\mu$$

$$= \sum_{x,y \in X} (\delta^x_{\sqrt{\hat{h}}}, \delta^y_{\sqrt{\hat{h}}})_\mu$$

$$= \sum_{x,y \in X} \sum_{v \in J} \hat{h}(v) (\delta^x_v, \delta^y_v)_\mu$$

$$\left(\because (\delta^x_v, \delta^y_{v'})_\mu = 0 \text{ if } v \neq v' \right)$$

$$= \sum_{x,y \in X} \sum_{v \in J} \hat{h}(v) Q_v(R(x,y))$$

$$= \sum_{x,y \in X} h(R(x,y))$$

$$= \sum_{x,y \in X} f(R(x,y)) - \hat{f}(v_0) Q_{v_0}(R(x,y))$$

$$= \sum_{x,y\in X} f(R(x,y)) - \hat{f}(v_0)\, Q_{v_0}(R(x,y))$$

$$= (\#X) f(i_0) + \sum_{x\neq y} \underbrace{f(R(x,y))}_{\in \mathbb{R}_{\le 0}}$$

$$- \hat{f}(v_0) \frac{(\#X)^2}{\#M}$$

$$\le (\#X) f(i_0) - \hat{f}(v_0) \frac{(\#X)^2}{\#M}$$

これより $\quad 0 \le (\#X) f(i_0) - \hat{f}(v_0) \dfrac{(\#X)^2}{\#M}$)

Ex 11.2.6 :

$H(3,2)$ について

$A = \{0, 2, 3\} \subset I$ とおく.

Claim $\forall X$: A-code,

$\# X \leq 4$

$\because$ $f : I \to \mathbb{Q},\ i \mapsto 4 - 2i = \begin{cases} 4 & i=0 \\ 2 & i=1 \\ 0 & i=2 \\ -2 & i=3 \end{cases}$

とおくと

$$\hat{f}(\ell) = \begin{cases} 8 & (\ell = \overset{\substack{V_0 \\ \shortparallel}}{0}, 1) \\ 0 & (\ell = 2, 3) \end{cases}$$

故 $f \in \mathcal{E}(H(3,2); A)$

X : A-code を任意にとる.

Thm 11.2.4 より

$$(\# X)\underbrace{\hat{f}(V_0)}_{=8} \leq \underbrace{(\# M)}_{=8}\underbrace{f(i_0)}_{=4}$$

よって $\# X \leq 4$ $\boxtimes$

Ex 11.2.7

$H(8,2)$ において

$$A := \{0, 4, 5, 6, 7, 8\}$$

とおく.

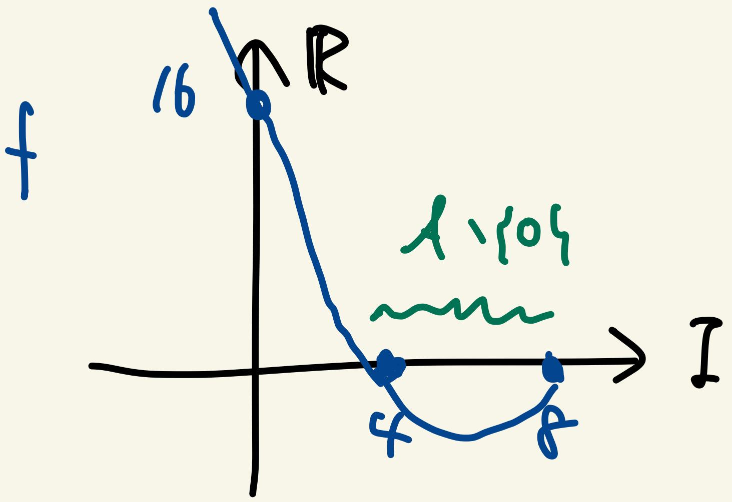
Claim $\forall X$: A-code,

$$\# X \leq 16$$

$\because$ $f : I \to \mathbb{C}$

$$i \mapsto \frac{1}{2}(i-4)(i-8)$$

とおく.



$$\hat{f} : J \to \mathbb{C}, \quad l \mapsto \begin{cases} 2^8 & (l = \overset{v_0}{\overset{\shortparallel}{0}}, 1) \\ 2^6 & (l = 2) \\ 0 & (l = 4 \sim 8) \end{cases}$$

より　$f \in \Xi(H(8,2); \mathcal{A})$.

任意に

$X \subset H(8,2)$: $\mathcal{A}$-code とする.

Thm 11.2.4 より

$$(\#X)\underbrace{\hat{f}(v_0)}_{= 2^8} \le \underbrace{(\#M)}_{= 2^8}\underbrace{f(i_0)}_{= 16}$$

従って　$\#X \le 16$.

$\square$