Section 12：表現の重複度

Thm 9.1.2, 9.2.1 を示すための

表現論の準備

設定：G：有限群

記号：FUR_G：Finite dimensional unitary G-representation 全体

$$\mathrm{IFUR}_G := \{ (\rho, V) \in \mathrm{FUR}_G \mid (\rho, V) \text{ 既約} \}$$

Section 12.1 : Intertwining operators

設定: $\left.\begin{array}{l}(\rho, V)\\(\tau, W)\end{array}\right\} \in \mathrm{FUR}_G$

Def 12.1.1 線型写像

$A : V \to W$ が G-intertwining

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall} g \in G,\ {}^{\forall} v \in V$

$$A(g \cdot_{\rho} v) = g \cdot_{\tau} A(v)$$

Def 12.1.2

$$\mathrm{Hom}_G(V, W)$$

$$:= \{ A : V \to W \mid G\text{-intertwiring} \}$$

Prop 12.1.3 :

$\mathrm{Hom}_G(V, W)$ は

ベクトル空間

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{ A : V \to W \mid 線型 \}$$

の linear subsp

Def 12.1.4 :

(ρ, V) と (τ, W) が

G-rep として同型

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$

s.t. $f: V \to W$ は

全単射

(⇝ $f^{-1}: W \to V$ も

G-intertwining)

Thm 12.1.4

FUR_G は $Hom_G(-,-)$

について圏をなす

i.e. ① ${}^\forall A \in Hom_G(V, W)$

$$\left(\begin{array}{l} {}^\forall B \in Hom_G(W, U), \\ \qquad B \circ A \in Hom_G(V, U) \\ \\ ② \ id_V \in Hom_G(V, V) \end{array} \right)$$

Section 12.2: Schur の補題

設定: (ρ, V), (τ, W) : Irreducible finite dim'l unitary G-reps

Thm 12.2.1 (Schur's lemma)

(ρ, V) と (τ, W) で…

- G-rep として同型

  $\iff \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 1$

- G-rep として同型でない

  $\iff \dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = 0$

(証明準備中)

Section 12.3: キャラ成分

設定: (τ, W) : Finite dim'l unitary G-reps

Def 12.3.1 : 各 irred. finite dim'l unitary G-rep (ρ, V) について

$$W_\rho := \mathrm{Span}\{ f(v) \mid f \in \mathrm{Hom}_G(V, W),\ v \in V \} \subset W$$

とおく.

W_ρ を (τ, W) の (ρ, V)-成分 とよぶ

Thm 12.3.2 :

$(\rho, V), (\rho', V')$: irred. fin. dim'l unitary G-reps

- (ρ, V) と (ρ', V') が G-rep として同型のとき

$$W_\rho = W_{\rho'}$$

- 〃 同型でないとき

$$W_\rho \perp W_{\rho'}$$

Hint:

Lemma 12.3.3: (ρ, V): irred

$f \in \mathrm{Hom}_G(V, W)$ とする.

$f \neq 0$ のとき $f(V) \subset W$ は G-stable

で V と $f(V)$ は同型

Lemma 12.3.4:

$W_0 \subset W$: G-stable とする.

このとき

$W \to W_0$: 直交射影

は G-intertwing

$$\hat{G}_\tau := \left\{ (\rho, V) : \text{きやく } \overset{\text{fin. dim'l}}{\text{unitary}} \ G\text{-rep} \;\middle|\; \operatorname{Hom}_G(V, W) \neq 0 \right\} \Big/ \text{同型}$$

とおく.

Prop 12.35: キャラ成分分解

$\{W_e\}_{[(e,v)]\in\hat{G}_\tau}$ は

W の直交直和分解

Rem 各 (τ, W) について

キャラ成分分解は一意

Section 12.4 : 表現の重複度

設定 : $(\rho, V) \in \mathrm{IFUR}_G$

$(\tau, W) \in \mathrm{FUR}_G$

Def 12.4.1 :

$m(V, W) := \dim \mathrm{Hom}_G(V, W)$

(ρ, V) の (τ, W) における重複度

とおく.

Thm 12.4.2:

W_ρ は $V^{\oplus m(V,W)}$

$$\parallel$$

$$\underbrace{V\oplus V\oplus \cdots \oplus V}_{m(V,W)\text{コ}}$$

と G-rep として同型

(同型写像 $\overset{1:1}{\longleftrightarrow}$ $\left\{ \begin{array}{c} \mathrm{Hom}_G(V,W) \\ \text{の基底} \end{array} \right\}$)

Thm 12.4.3 以下は同値

(i) W_ρ のキャラ分解は一意

$\Updownarrow$

(ii) $m(V, W) \leq 1$

Ex 12.4.4

(ρ, V) : IFUR$_G$ を fix

$(V \neq 0)$

$(\tau, W) = (\rho \oplus \rho, V \oplus V)$ とする.

このとき $W_\rho = W$ であり,

$m(V, W) = 2$.

- $\{V \oplus 0,\ 0 \oplus V\}$ は W の既約分解

しかし

- $V_1 := \{(v, v) \mid v \in V\}$

$V_2 := \{(v, -v) \mid v \in V\}$

とすると $\{V_1, V_2\}$ も W の既約分解

Thm 12.4.5 : 以下は同値

(i) W の Iso 分解は一意

$\Updownarrow$

(ii) $\forall [(\rho, V)] \in \hat{G}_\tau$,

$$m(V, W) \leq 1$$

Section 12.6. Involutive $\mathbb{C}$-algebras

Def 12.6.1 ($\mathbb{C}$-algebras)

A : a $\mathbb{C}$-vector space

$\bullet : A \times A \to A$: bi-linear map

$\rightsquigarrow$ $(A, \underset{積}{\bullet})$: a $\mathbb{C}$-algebra.

$(\mathcal{A}, \cdot)$ を $\mathbb{C}$-algebra とする.

Def 12.6.2 (Involutions)

A map $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $a \mapsto a^*$

is called an involution (対合)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

- $*$ は anti $\mathbb{C}$-linear
- $\forall a, b \in \mathcal{A}$

$$(a \cdot b)^* = b^* \cdot a^*$$

(anti algebraic)

$*$ 을 involution 이라 하고,

$(\mathcal{A}, \cdot, *)$ 를 involutive

$\mathbb{C}$-algebra

라 한다.

Ex 12.6.3

W : a finite dim'l $\mathbb{C}$-vector sp equipped with Hermitian inner product.

$\rightsquigarrow$ $\mathrm{End}(W) := \{A : W \to W \mid \text{linear}\}$

は合成と随伴により involutive $\mathbb{C}$-algebra になる.

Remark

$A \in \mathrm{End}(W)$ について

随伴 $A^* \in \mathrm{End}(W)$ とは

以下の条件を満たすもの (unique)

条件：

$$(Aw_1, w_2) = (w_1, A^* w_2)$$

$$(\forall w_1, w_2 \in W)$$

Section 12.7. Hecke algebras

設定: $(\tau, W) \in FUR_G$

Def 12.7.1:

$$\mathrm{End}_G(W) := \mathrm{Hom}_G(W, W)$$

Prop 12.7.2:

$\mathrm{End}_G(W)$ は $\mathrm{End}(W)$ の部分 involutive $\mathbb{C}$-algebra となる.

(Hecke algebra)

$$W = \bigoplus_{[(\rho, V)] \in \hat{G}_\tau} W_\rho$$

を キャラ成分分解とする.

Prop (2.7.3).

$$\mathrm{End}_G(W) \cong \bigoplus_{[(\rho, V)] \in \hat{G}_\tau} \mathrm{End}_G(W_\rho)$$

as involutive $\mathbb{C}$-algebras

Thm 12.7.4:

各 $[(\rho, V)] \in \widehat{G}_\tau$ について

involutive $\mathbb{C}$-algebra として

$$\mathrm{End}_G(W_\rho) \cong \mathrm{Mat}(m(V,W); \mathbb{C})$$

重複度

$\mathbb{C}$-行列代数

対合：転置共役

積：行列の積

Cor 12.7.5: 以下は同値:

(i) W のキャラ分解は一意.

$\Updownarrow$

(ii) $\forall [(\varphi, V)] \in \hat{G}_\pi$,

$$m(V, W) \leq 1$$

$\Updownarrow$

(iii) $\mathrm{End}_G(W)$ が可換