Section 13. Multiplicities on regular representations

Thm 9.1.2, 9.2.1 を示す.

設定:

G : a finite group

$G \curvearrowright M$: a homog. G-set.

記号.

$G \curvearrowright \mathbb{C}^M$: the regular representation

Section 13.1 Proof of Thm 9.21

Thm 9.21 (再掲)：以下は同値

(i) $G \curvearrowright \mathbb{C}^M$ は multiplicity-free (the regular rep)

$\Updownarrow$

(ii) $\forall V \subset \mathbb{C}^M$: an irred G-stable subsp,

$$\dim V^{G^x} = 1$$

ここに $V^{G^x} := \{ v \in V \mid g_e v = v \quad \forall g \in G^x \}$

$x_0 \in M$ を fix

$K := G^{x_0}$ とおく.

$(\rho, V) \in \mathrm{IFUR}_G$ を fix

Thm 13.1.1:

$$\dim V^K = m(V, \mathbb{C}^M)$$

Thm 9.2.1 は

Thm 13.1.1 と Thm 12.4.5

から従う.

Thm 13.1.1 の証明

$$(V^\vee)^K := \left\{ \phi \in V^\vee \;\middle|\; \begin{array}{l} \forall k \in K \\ \forall v \in V \\ \phi(kv) = \phi(v) \end{array} \right\}$$

とおくと

$$\begin{array}{ccc} V^K & \to & (V^\vee)^K \\ v & \mapsto & (\ ,\ v) \end{array}$$ は線型同型.

示) $\dim (V^\vee)^K = \dim \mathrm{Hom}_G(V, \mathbb{C}^{M})$

$$(V^\vee)^K \to \mathrm{Hom}_G(V, \mathbb{C}^M)$$

$$\phi \mapsto A_\phi$$

$$\phi_A \leftarrow A$$

を以下のように定める.

$$A_\phi(v) : M \to \mathbb{C}, \ x \mapsto \phi(g_x^{-1} v)$$

($g_x \in G$ は $g_x x_0 = x$ となるようにとる)

$$\phi_A : V \to \mathbb{C}, \ v \mapsto (A(v))(x_0)$$

Claim $(V^\vee)^K \to \mathrm{Hom}_G(V, \mathbb{C}^M)$

$$\phi \mapsto A_\phi$$

$$\phi_A \leftarrow A$$

は well-defined で

$(V^\vee)^K$ と $\mathrm{Hom}_G(V, \mathbb{C}^M)$

の線型同型を与える.

以下略

∎

Section 13.2 : Matrix algebras

この節では

M : 単なる有限集合

でOK

Prop 13.2.1

$\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C}) := \{A : M\times M \to \mathbb{C}\}$

は自然な仕方で

"M を添え字集合とする

$\mathbb{C}$-行列代数" とみなせる.

特に involutive $\mathbb{C}$-algebra.

$\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ の積

$A, B \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ について

積 $A \cdot B \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ を

$$(A \cdot B)(x, y) := \sum_{z \in M} A(x, z) B(z, y) \quad (x, y \in M)$$

により定める.

$\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ の対合

$A \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ について

対合 $A^* \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ を

$$A^*(x,y) := \overline{A(y,x)}$$

$$(x,y \in M)$$

として定める.

Def 13.2.2 :

各 $A \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ に対して

$$\tilde{A} : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}^M$$

$$f \mapsto \tilde{A}f : M \to \mathbb{C}$$

$$x \mapsto \sum_{y \in M} A(x,y) f(y)$$

Prop 13.2.3 :

$$\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C}) \overset{\sim}{\to} \mathrm{End}(\mathbb{C}^M)$$

$$A \mapsto \tilde{A}$$

as involutive $\mathbb{C}$-algebras.

Section 13.3 :

Hecke algebras for regular representations

設定 :

G : a finite group

$G \curvearrowright M$: a homog. G-set.

Def 13.3.1

$G \curvearrowright^{\mathrm{diag}} M \times M$ を考える.

$$\mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C}) := \left(\underset{\substack{\| \\ \mathbb{C}^{M\times M}}}{\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})}\right)^{\mathrm{diag}\,G}$$

$$= \left\{ A \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C}) \;\middle|\; \begin{array}{l} A(gx, gy) = A(x,y) \\ {}^\forall g \in G, {}^\forall x, {}^\forall y \in M \end{array} \right\}$$

$\subset \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ とおく.

Prop 13.3.2 :

$\mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$ は

$\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ の

sub involutive $\mathbb{C}$-algebra.

更に

$$\dim \mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$$

$$= \# I$$

$$(I := \mathrm{diag}\, G \backslash M \times M)$$

Thm 13.3.3:

同型

$$\mathrm{Mat}(M;\mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(\mathbb{C}^M)$$
$$A \mapsto \tilde{A}$$

において

$\mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$ は

$\mathrm{End}_G(\mathbb{C}^M)$

と対応する.

特に $\mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C}) \to \mathrm{End}_G(W)$
$$A \mapsto \tilde{A}$$

は inv. $\mathbb{C}$-alg として同型

Cor 13.3.4:

$$\dim \mathrm{End}_G(\mathbb{C}^M) = \# I.$$

Section 13.4 : Thm 9.1.2 の証明

Thm 9.1.2 (再掲) : $(M, R : M \times M \twoheadrightarrow I)$ が symmetric とする.

このとき $G \overset{\rho}{\curvearrowright} \mathbb{C}^M$ は multiplicity-free

Recall : $G \curvearrowright \mathbb{C}^M$ が m.f.

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{End}_G(\mathbb{C}^M)$ が可換

Cor 12.7.5

$$\overset{\text{Thm 13.3.1}}{\parallel}$$

$\mathrm{Mat}_G(M; \mathbb{C})$

目標 : (M, R) : symmetric

$\Longrightarrow$ $\mathrm{Mat}_G(M; \mathbb{C})$ は可換

Def 13.4.1

各 $A \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ について

${}^tA \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C})$ を

$${}^tA(x,y) := A(y,x)$$

$$(x,y \in M)$$

と定める.

Prop 13.4.2 :

$${}^t(A \cdot B) = {}^tB \cdot {}^tA$$

$$(A, B \in \mathrm{Mat}(M;\mathbb{C}))$$

Prop 13.4.3

$\mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$ は

$A \mapsto {}^tA$ で閉じる.

Lemma 13.4.4:

If $A = {}^tA$

for any $A \in \mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$,

then $\mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$ は可換

Pf: $AB = {}^tA \cdot {}^tB = {}^t(BA) = BA$

$(B, A \in \mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C}))$

Lemma 13.4.5 :

(M, R) が symmetric

$\iff {}^\forall A \in \mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$

$${}^tA = A$$

Recall :

(M, R) が symmetric

$\overset{}{\underset{\text{def}}{\iff}} R(x,y) = R(y,x)$

Lemma 13.4.4, 13.4.5 より

(M, R) が symm

$\Rightarrow \mathrm{Mat}_G(M;\mathbb{C})$ が可換

が言えた.