Section 14 : Spheres

設定 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

記号 $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$

ユークリッド
ノルム

Section 14.1 : Orthogonal group

Def 14.1.1

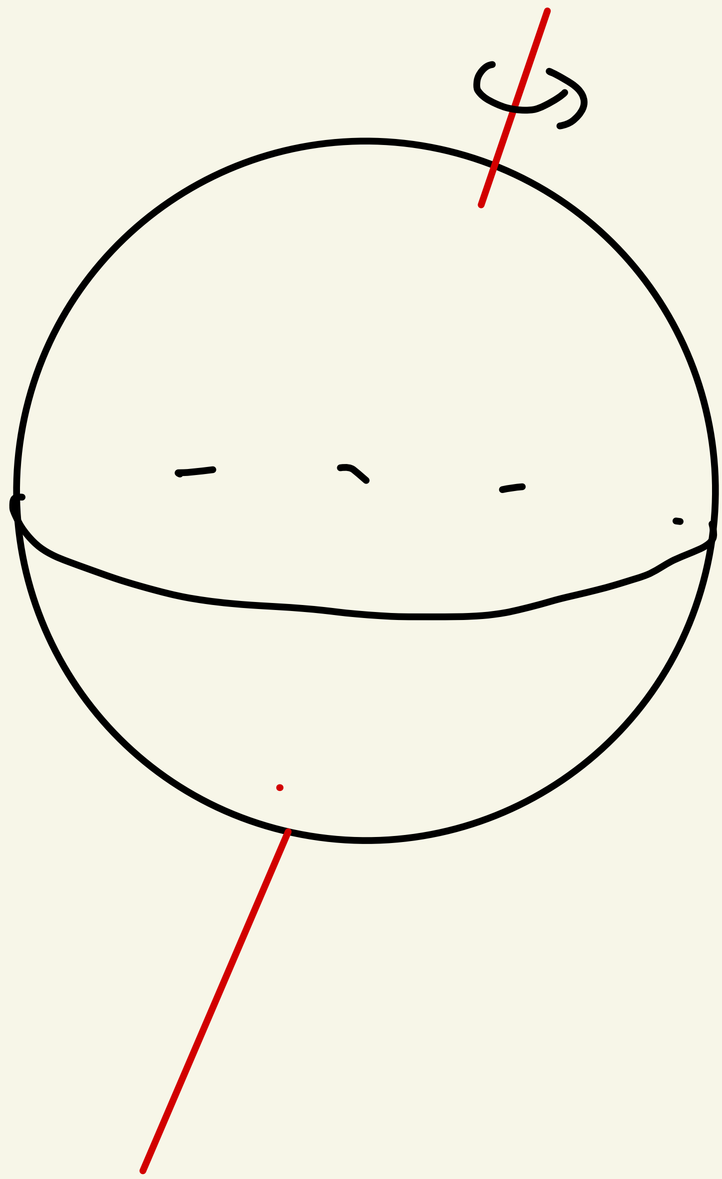
$$O(n+1) := \{ g \in Mat(n+1;\mathbb{R}) \mid {}^t g \cdot g = I_{n+1} \}$$

($n+1$ 次直交群)

Prop 14.1.2

$O(n+1)$ は合成について群をなす.

$O(n+1)$ は自然に S^n に推移的に作用する



Section 14.2 : I

Def 14.2.1

$$I := [-1, 1] \subset \mathbb{R}$$

閉区間

$$R : S^n \times S^n \to I$$

$$(x, y) \mapsto \underbrace{(x, y)_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{\text{標準内積}}$$

Thm 14.2.2

- R is diag $O(n+1)$ - inv
- $S^n \times S^n$ 上の diag $O(n+1)$-inv map (こ 問 17

$\Rightarrow$ R is universal

Section 14.3: $\mathbb{J}$

Def 14.3.1:

$$\mathbb{J} := \{0, 1, 2, \cdots\}$$

$$= \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$O(n+1) \circlearrowright C(S^n) := \{ f \in \mathbb{C}^{S^n} \mid \text{conti} \}$$

$$O(n+1) \circlearrowright \quad \cup \quad \text{dense w.r.t. sup-norm}$$

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(S^n) := \mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R}^n)|_{S^n}$$

$$\|$$

$$\bigoplus_{l \in J} \mathrm{Harm}_l(S^n)$$

$\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(S^n)$ の キヤク分解 (一意)

$$\mathrm{Harm}_l(S^n) := \left\{ \begin{array}{l} l\text{次斉次} \\ \text{調和多項式} \\ \text{関数 on } \mathbb{R}^{n+1} \end{array} \right\} \Bigg|_{S^n}$$

Section 14.4 : Q

$\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(I) := \mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})|_I$ とおく.

$(I = [-1, 1])$

Def 14.4.1 :

$$w : I \to \mathbb{R}_{\geq 0},\ \alpha \mapsto (1-\alpha^2)^{\frac{n-3}{2}}$$

とおく.

{ }は{ }の S^n 版

$f, h \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(I)$ について

$$(f, h)_w := \int_{-1}^{1} f(\alpha)\overline{h(\alpha)}\, w(\alpha)$$

とする.

$\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(I)$ 上の Hermitian inner prod.

Def 14.4.2

$\{Q_\ell\}_{\ell \in J = \mathbb{Z}_{\geq 0}} \subset \mathrm{Pol}_e(I)$

を次のように定める.

$Q_0 = 1$

Q_k は k 次多項式であって

- $Q_{k-1}, \cdots, Q_0$ と直交する.
- $Q_k(1) = \binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2}$

$$\begin{aligned} &\binom{n+k-1}{k} - \binom{n+k-3}{k-2} \\ &\quad \parallel \\ &\dim \mathrm{Harm}_k(S^n) \end{aligned}$$

(Gegenbauer 多項式系の一種)

Fact $\quad (Q_k, Q_k)_w = Q_k(1)$

$$\begin{array}{c} Q_k(1) \\ \| \\ \dim \mathrm{Harm}_k(S^n) \end{array}$$

Section 14.5 :

Spherical Fourier transform

$$I = [-1, 1]$$

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(I) = \mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(\mathbb{R})|_I$$

$$J = \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

$$C_c(J) := \left\{ f \in \mathbb{C}^J \;\middle|\; \begin{array}{l} f(\ell) \neq 0 \\ \text{となる } \ell \in J \\ \text{は有限} \end{array} \right\}$$

とおく.

Def 14.5.1 (Spherical Fourier transf)

$$\mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(I) \xrightarrow{\sim} C_c(J)$$

$$f \mapsto \hat{f} \text{ を}$$

$$\hat{f}(l) := (f, Q_l)_w \frac{1}{Q_l(1)}$$

と定める。

$$\left(f = \sum_{l \in J} \hat{f}(l) Q_l \right)$$

となるようにした

Section 14.6 : A-code

$$A \subset I \text{ with } 1 \in A$$
$$I = [-1,1] \qquad A: \text{ fix}$$

Def 14.6.1

$X \underset{\text{finite}}{\subset} S^n$ が A-code

$X \neq \emptyset$

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} R(x,y) \in A$$
$$(\forall x, y \in X)$$

Ex 14.6.2:

$$\mathcal{A} = [-1, \tfrac{1}{2}] \cup \{1\}$$

α とき

$X \subset S^{n-1}$ が $\mathcal{A}$-code

\# finite

$\emptyset$

$\iff \forall x, y \in X$ with $x \neq y$

$$(x, y)_{\mathbb{R}^{n+1}} \leq \frac{1}{2}$$

$\iff \forall x, y \in X$ with $x \neq y$

$$\angle x o y \geq 60^\circ$$

角度

Thm 14.6.3

$A := [-1, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$ とおく。

Section 1 で定めた接吻数

$T(n+1)$

$= \max\{\#X \mid X$ は A-code on $S^n\}$

Section 14.7

Delsarte's bounds

設定: $A \subset I$ with $1 \in A$

Def 14.7.1:

$$\Xi(I;A) := \left\{ f \in \mathrm{Pol}_{\mathbb{C}}(I) \;\middle|\; \begin{array}{l} ① \ f(1) \in \mathbb{R},\ \hat{f}(0) \in \mathbb{R} \\ ② \ f(\alpha) \in \mathbb{R}_{\leq 0} \quad \forall \alpha \in A \setminus \{1\} \\ ③ \ \hat{f}(l) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \quad \forall l \in J \setminus \{0\} \end{array} \right\}$$

Thm 14.7.2 (Delsarte's bound)

$f \in \mathcal{B}(I;A)$ とする.

このとき $\forall X$: A-code,

$$\hat{f}(0)(\# X) \le f(1)$$

Key lemma 14.7.3 (この Lemma を示すには色々準備必要)

$$\forall X \underset{\text{finite}}{\subset} S^n$$

$$\sum_{x,y \in X} Q_\ell(R(x,y)) \in \mathbb{R}_{\ge 0}$$

Ex 14.7.4

$\tau(\delta) \leq 240$ を示したい.

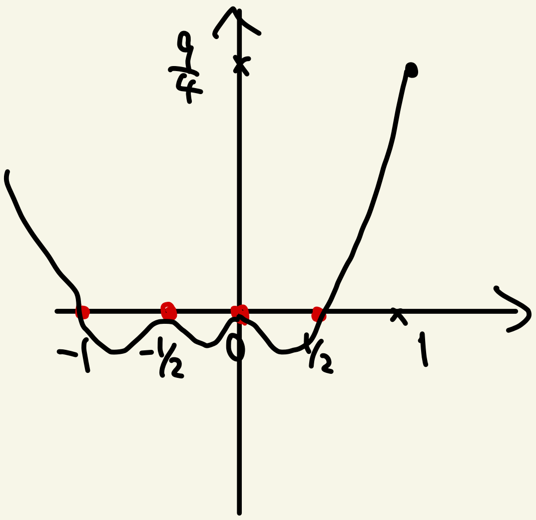
$\mathcal{A} = [-1, \frac{1}{2}] \cup \{1\}$ とおく.

示 $\forall X : \mathcal{A}$-code, $\# X \leq 240$.

$f: I \to \mathbb{C},\ \alpha \mapsto \alpha^2(\alpha+1)(\alpha+\frac{1}{2})^2(\alpha-\frac{1}{2})$

とおく.

このとき $f \in \mathfrak{B}(I;A)$



$f(1) = 9/4$

$f(\alpha) \in \mathbb{R}_{\leq 0}$

$\forall \alpha \leq \frac{1}{2}$

また

$\hat{f}(0) = 3/320 \quad \hat{f}(1) = 3/320 \quad \hat{f}(2) = 3/448$

$\hat{f}(3) = 39/8960 \quad \hat{f}(4) = 19/8960 \quad \hat{f}(5) = 3/3584$

$\hat{f}(6) = 1/5376 \quad \hat{f}(l) = 0 \quad (\forall l \geq 7)$

となるけど…

X : A-code を fix

Thm 14.7.2 より

$$\underbrace{f(0)}_{=\,3/320}\,\#X \le \underbrace{f(1)}_{=\,9/4}$$

特に

$$\#X \le 240.$$