

## 講義全体の流れ

Part I : 変数微分論を代数的に捉える。

Part II : 可微分環の定義, 構成

Part III : 可微分環上の各種概念

注意: Part I が最も難しい。

Part II はむしろややこしい。

時間と空間の頭に立ちたい。

Part III は Part I, Part II の頭に立ちたい。

Part I の概要を紹介しておく。

# Part I 2: 代数

- ① 代数  $\mathcal{A}$  の関数空間
- ② 方向微分  $\partial$  の代数的定義  $\leadsto$  接空間
- ③  $C^\infty$  級写像  $f$  の代数的定義
- ④ 全微分  $df$  の代数的定義

①  $U \subset_{\text{open}} \mathbb{R}^n$  と  $\vec{a} \in U$ .

$\exists \alpha > 0$

$C^\infty(U) := \{ f: U \rightarrow \mathbb{R} \mid C^\infty \text{級関数} \}$

( $\infty$ 次元)  $\mathbb{R}$ 代数

$\mathbb{R}$ ベクトル空間  $\mathcal{L}$  の環.

②  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $p \in U$  とする.  
open

各  $v \in \mathbb{R}^n$  に対し

$\psi_p : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto f$  at  $p$  in the  
direction  $v$

と定む.

$\psi_p$  は 線型写像 と定む,

ライプニッツ則 "  $\psi_p(f \cdot g) = \psi_p(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \psi_p(g)$  " と満足する.

$$T_p U := \{ \gamma : C^\infty(U) \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma \text{ は線型写像} \} \quad \left. \begin{array}{l} \gamma(f \cdot g) = \gamma(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \gamma(g) \\ \forall f, g \in C^\infty(U) \end{array} \right\}$$

と置く.

$T_p U$  は  $n$ 次元 の線形空間 (と見る),

$\bar{\Psi}_{p,U} : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p U$  は 線型同型 証明は必ずしも...

より,  $T_p U$  は "方向微分" を代数的に定式化 (7.10) の.

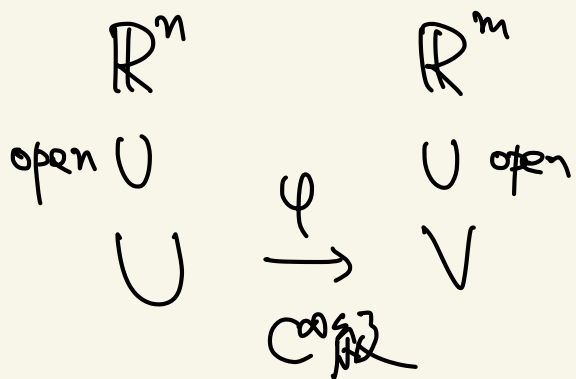
③  $U \subset \mathbb{R}^m$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$ ,  $\varphi: U \rightarrow V$ : 寫像  
<sub>open</sub> <sub>open</sub>

Thm  $\varphi$  是  $C^\infty$  級寫像

$(\Leftrightarrow) \forall f \in C^\infty(V), f \circ \varphi \in C^\infty(U)$

(  $\varphi$  是 1-1 單射同型  $C^\infty(V) \rightarrow C^\infty(U)$  是 對 )  
 $f \mapsto f \circ \varphi$

④



$p \in U \quad \varepsilon \bar{d}$ .

Def

$$(d\varphi)_p : T_p U \rightarrow T_{\varphi(p)} V$$

$$\gamma \mapsto (d\varphi)_p \gamma : C^\infty(V) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \gamma(f \circ \varphi)$$

$\exists \varphi$  a  $p$  is a  $\mathbb{R}^m$  neighborhood of  $p$ .

Thm

$T_p U$

$(d\varphi)_p \rightarrow T_{\varphi(p)} V$

$\bar{\Phi}_{p,U} \mid \mathbb{R}^n$

$\mathcal{Q}$

$\mid \bar{\Phi}_{\varphi(p),V}$

$\mathbb{R}^n$

$\rightarrow$

$\mathbb{R}^m$

$(J\varphi)_p$

~~~~~

$\varphi \circ p := \text{matrix } \varphi \circ C \text{ "行列"}$