Section 1 : イントロダクション

内容 : 多様体論

扱うトピック :

- C^∞-多様体
- 接空間
- C^∞-写像とその微分

Recall：　位相空間 … 連続性の議論ができる集合

（"開集合系"を定めた）

多様体：　微積分の議論ができる位相空間

（"局所座標系"を定める）

幾何学Aでは 多様体上の微分論を扱う

（積分論は幾何学D）

モチベーションの1つ："位相空間上の微分方程式"を定義したい.

例：地球上の気象変動を表す数理モデルを作りたい.

⟶「2次元球面上で"微分方程式"を考える」

というモデルを考えたい.

⟶ そもそも 2次元球面上の"微分方程式"の定義を

(数学者の仕事) きちんと与えておく必要がある.

◎ 何が難しいか.

$S^2 := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2=1\}$ とおく,

S^2 上の関数 $f: S^2 \to \mathbb{R}$ を考える.

"f の偏導関数" はどうやって定義する?

失敗例 $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) := \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h,y,z)-f(x,y,z)}{h}$ とおく.

$((x,y,z) \in S^2)$

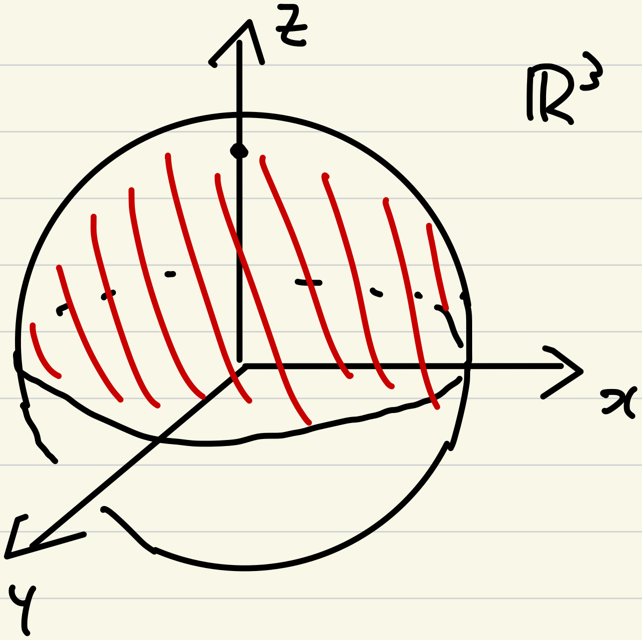
f は S^2 上でのみ定義されているので

$f(x+h,y,z)$ は定義できない.

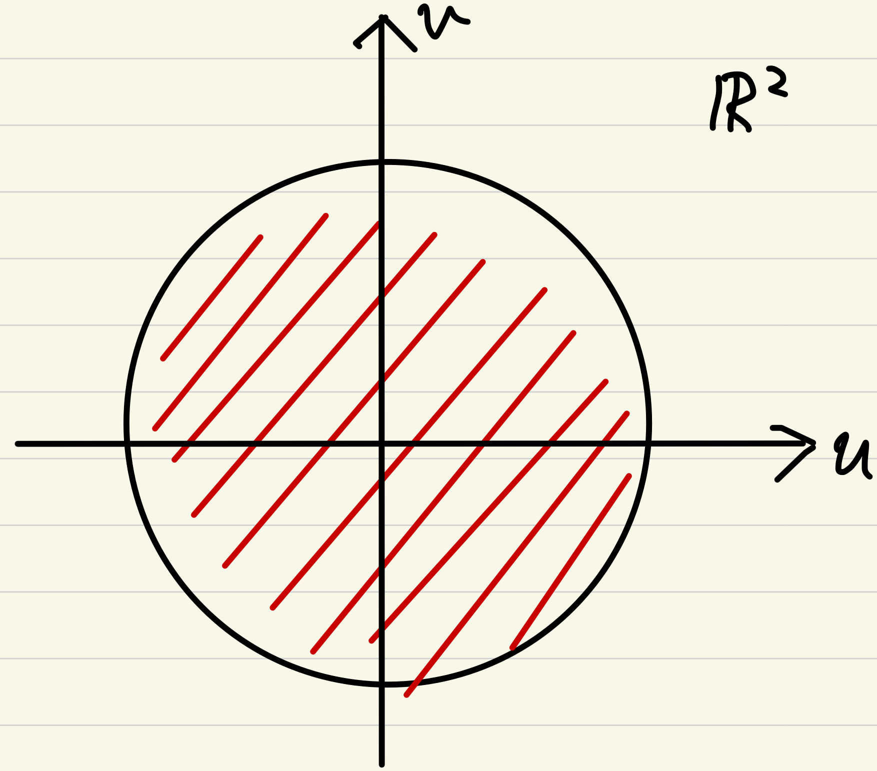
◎ アイディア

局所的に座標を与える（多様体論の中心的アイディア）

⟶ 局所的に偏導関数が定義できる.



同一視
⟶



この場合，北半球上で $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ を考えることができる.

更に"ベクトル場"の概念を用いると
大域的に微分方程式が定義できる！

⟶ 大域幾何，解析学の土台となる．

例：ド・ラーム理論（空間の形と微分方程式の関係）
リーマン幾何，シンプレクティック幾何
（力学の土台）

対称空間上の調和解析など
（波の解析）

講義全体の流れ

Part I : 1変数の微分論を代数的に捉える.

Part II : 可微分多様体の定義, 構成

Part III : 可微分多様体上の各種概念

注意 : Part I が最も難しい

Part II はひたすらややこしい.

時間をかけないと頭に入らない

Part III は Part I, Part II が頭に入っていれば難しくない

㊥ この講義では"定義"を重んじよ.

理解の最低ライン： 講義ノートなどを見ながら
各種定義を厳密に運用できる.
また基本的な例について計算できる.

より深い理解： 各種定義を自分で再現できる.
また各定義の必然性や一般化
について考えることができる.

Section 1 終