Section 11：直積多様体 試験範囲外

C^∞級多様体の直積がC^∞級多様体になることを紹介する.

Part II：可微分多様体の定義

- Section 6 局所座標系
- Section 7 座標変換と C^∞-atlas
- Section 8 C^∞級関数 on C^∞-atlas
- Section 9 極大 C^∞-atlas
- Section 10 C^∞級多様体
- ＜ Section 11：直積多様体
- Section ~~11~~ 12 射影空間

Section 11.1 : 直積空間の C^∞-atlas

設定
M_i : 位相空間 $(i=1,2)$
$n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : $M_1 \times M_2$: 直積空間 (位相は直積位相)

Prop 11.1.1 : $(O_1, U_1, u_1) \in \mathcal{LC}(M_1 ; \mathbb{R}^{n_1})$
$(O_2, U_2, u_2) \in \mathcal{LC}(M_2 ; \mathbb{R}^{n_2})$

について

$$\Big(\underset{\substack{\cap\,\text{open} \\ M_1 \times M_2}}{O_1 \times O_2},\ \underset{\substack{\cap\,\text{open} \\ \mathbb{R}^{n_1+n_2}}}{U_1 \times U_2},\ \underset{(x^1, x^2) \mapsto (u_1(x^1), u_2(x^2))}{u_1 \times u_2 : O_1 \times O_2 \to U_1 \times U_2} \Big) \in \mathcal{LC}(M_1 \times M_2 ; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$$

Thm 11.1.2 : $\mathcal{A}^1 \in C^\infty\text{-atlas}(M_1 ; \mathbb{R}^{n_1})$

$\mathcal{A}^2 \in C^\infty\text{-atlas}(M_2 ; \mathbb{R}^{n_2})$ について

$$\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) := \{ (O_1 \times O_2,\ U_1 \times U_2,\ \mathfrak{u}_1 \times \mathfrak{u}_2) \in LC(M_1 \times M_2, \mathbb{R}^{n_1+n_2}) \mid (O_i, U_i, \mathfrak{u}_i) \in \mathcal{A}^i \ (i = 1, 2) \}$$

$$\in C^\infty\text{-atlas}(M_1 \times M_2 ; \mathbb{R}^{n_1+n_2})$$

Prop 11.1.3 :

$\mathcal{A}^1 \subset \mathcal{B}^1$ in C^∞-atlas$(M ; \mathbb{R}^{n_1})$

$\mathcal{A}^2 \subset \mathcal{B}^2$ in C^∞-atlas$(M ; \mathbb{R}^{n_2})$ a ≥ 3

$\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) \subset \Upsilon(\mathcal{B}^1, \mathcal{B}^2)$

Cor 11.1.4

$i=1,2$ について

$\mathcal{A}^i \in C^\infty\text{-atlas}(M_i : \mathbb{R}^{n_i})$ が極大であるとする.

$i=1,2$ について

$\mathcal{A}_0^i \in C^\infty\text{-atlas}(M_i : \mathbb{R}^{n_i})$ が $[\mathcal{A}_0^i] = \mathcal{A}^i$ (i.e. $\mathcal{A}_0^i \subset \mathcal{A}^i$)

を満たすとき

$$[\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)] = [\Upsilon(\mathcal{A}_0^1, \mathcal{A}_0^2)]$$

注意: $\mathcal{A}^1 \in C^\infty\text{-atlas}(M_1 : \mathbb{R}^{n_1})$, $\mathcal{A}^2 \in C^\infty\text{-atlas}(M_2 : \mathbb{R}^{n_2})$

が共に極大であったとしても

$\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2) \in C^\infty\text{-atlas}(M_1 \times M_2 : \mathbb{R}^{n_1+n_2})$ が

極大とは限らない.

Section 11.2 : 直積多様体

Thm 11.2.1 : $(M_i, \mathcal{A}^i)$: C^∞- n_i - mfd とする ($i=1,2$)

このとき $(M_1 \times M_2, [\Upsilon(\mathcal{A}^1, \mathcal{A}^2)])$ は

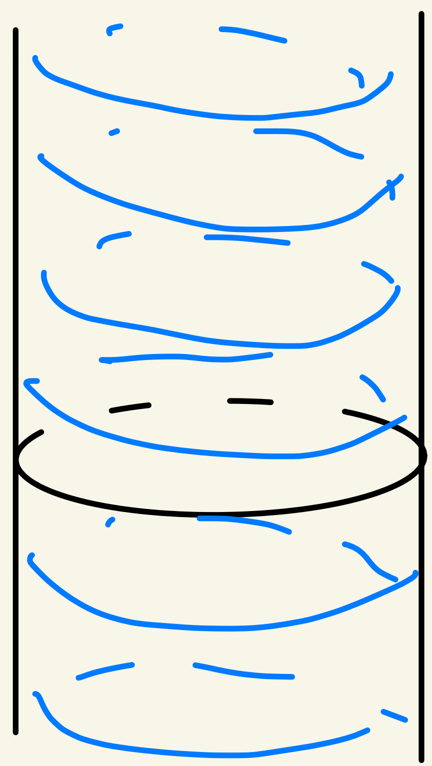
C^∞- (n_1+n_2) - mfd .

Ex 11.2.2

$\mathbb{R}$ も S^1 も C^∞-1-mfd なので

$\mathbb{R} \times S^1$ は C^∞-2-mfd

円筒 (annulas)



Ex 11.2.3

S^1 は C^∞-1-mfd であので

$T^2 := S^1 \times S^1$ は C^∞-2-mfd

2-torus