Section 12 : 射影空間

射影空間が C^∞ 級多様体であることを紹介する.

Part II : 可微分多様体の定義

- Section 6　局所座標系
- Section 7　座標変換と C^∞-atlas
- Section 8　C^∞ 級関数 on C^∞-atlas
- Section 9　極大 C^∞-atlas
- Section 10　C^∞ 級多様体　< Section 11 : 直積多様体
- Section ~~#~~ 12　射影空間

Section 12.1 : 射影空間とその位相

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 12.1.1 :

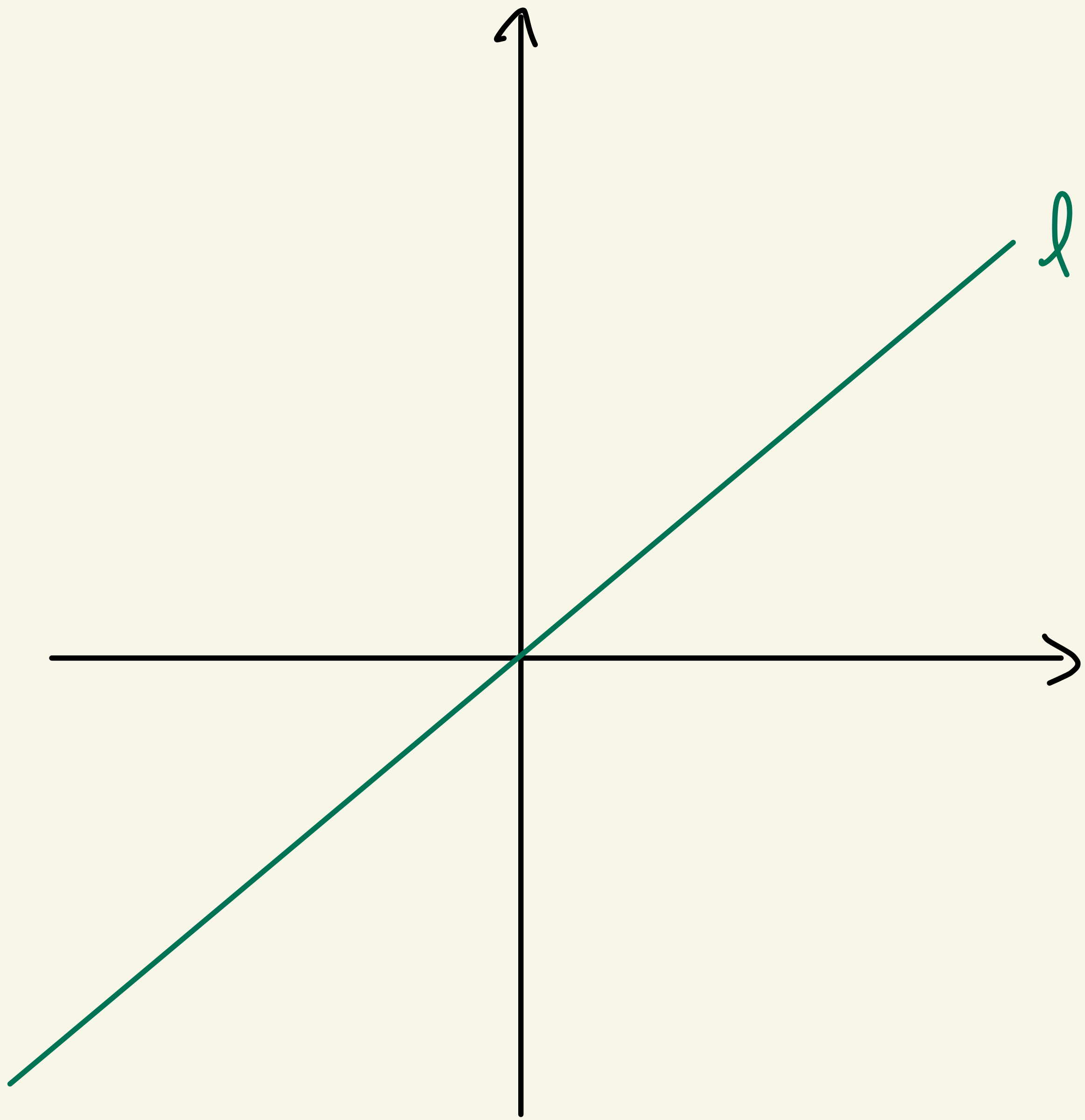
$\mathbb{R}P^n := \{ l \subset \mathbb{R}^{n+1} \mid l$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の 1 次元線型部分空間 $\}$

とおく.

射影空間

イメージ

($n=1$)



◎ $\mathbb{R}P^n$ に位相を定めたい．

$\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ を $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間（位相は相対位相）とみなす．

<u>Prop 12.1.2</u>： $\pi : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}P^n$

$x \mapsto \mathbb{R}x := \{rx \mid r\in\mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$

は写像として well-defined で全射

<u>Def 12.1.3</u>： $\mathbb{R}P^n$ に $\mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ の商としての商位相を定めて位相空間とみなす．

(i.e. $O \subset \mathbb{R}P^n$ が open $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi^{-1}(O) \subset \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ が open)

Prop 12.1.4: $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$: 線型部分空間 とする.

このとき

$$O_W := \{ l \in \mathbb{RP}^n \mid l \notin W \} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{RP}^n$$

Proof: ㊣ $\pi^{-1}(O_W) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$$\pi^{-1}(O_W) := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid \mathbb{R}x \notin W \}$$

$$= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x \notin W \}$$

$$= \mathbb{R}^{n+1} \setminus W \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

$W \subset \mathbb{R}^{n+1}$: 線型部分空間 は closed

Thm 12.1.5 : $\mathbb{R}P^n$ はコンパクトハウスドルフ位相空間.

ハウスドルフ性は商位相に遺伝するとは限らない

この命題は自明ではない.

Hint となる命題を Section 12.3 にいくつか挙げておく.

(試験範囲外)

Section 12.2：射影空間上の C^∞-atlas

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

◎ $\mathbb{R}P^n$ に C^∞-atlas を定めたい

記号：$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n$

$$x \longmapsto [x] = [x_1 : x_2 : \cdots : x_{n+1}]$$

$$\begin{array}{c} [x] \\ \shortparallel \\ \mathbb{R}x \end{array}$$

Remark：$x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

$$[x_1 : \cdots : x_{n+1}] = [y_1 : \cdots : y_{n+1}]$$

$$\Leftrightarrow {}^\exists \lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ s.t. } x = \lambda y.$$

Thm 12.2.1: 各 $i = 1, \cdots, n+1$ について $W_i := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 0 \} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とし,

$$O_i := O_{W_i} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}P^n$$

$$U_i := \mathbb{R}^n$$

← x_i をスキップする.

$$u_i : O_i \to U_i, \ [x] \mapsto \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots \overset{x_i}{\vee} \cdots, x_{n+1})$$

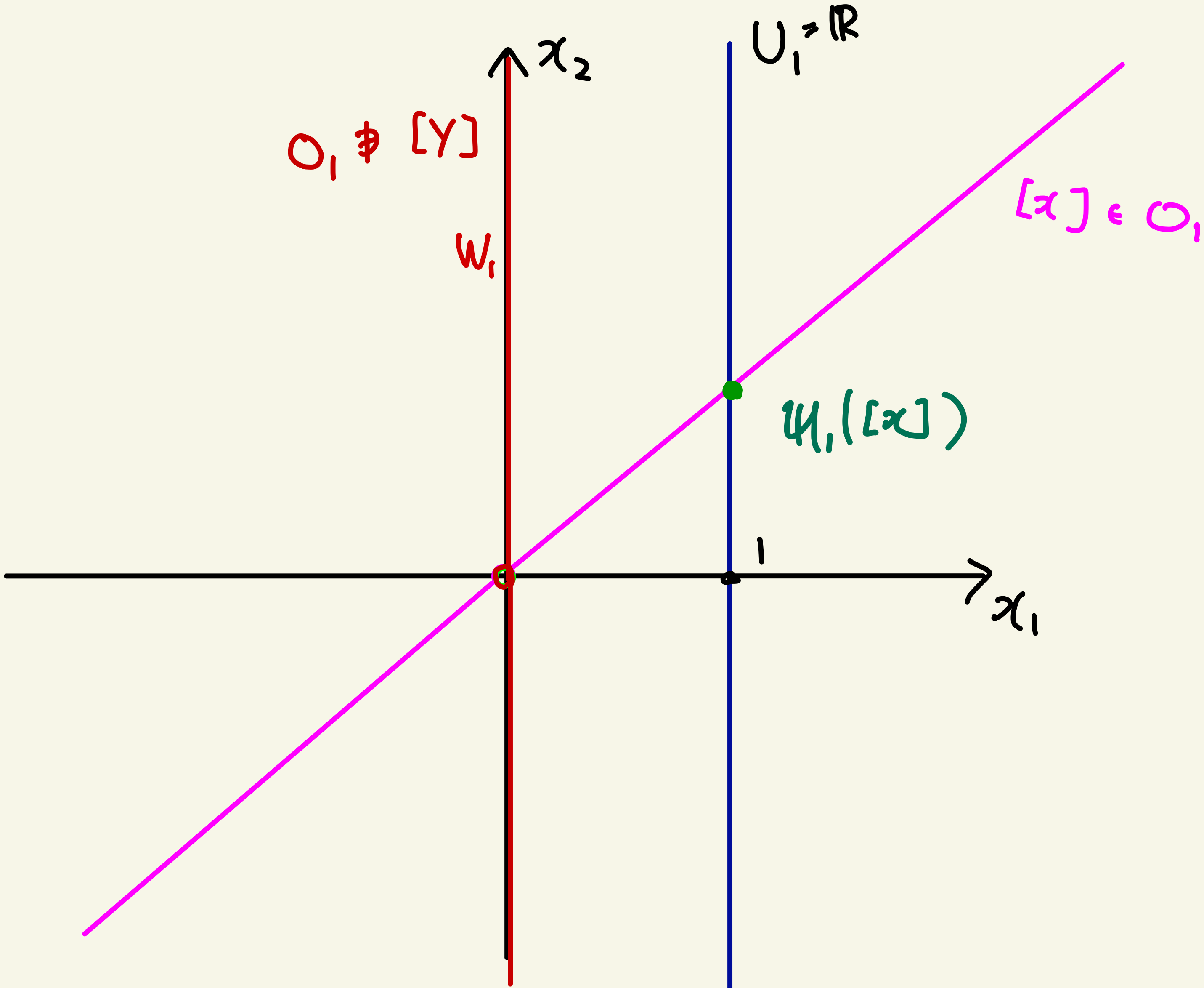
$$= \frac{1}{x_i}(x_1, \cdots x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n$$

$$(x \in \pi^{-1}(O_i))$$

とおくと $(O_i, U_i, u_i) \in LC(\mathbb{R}P^n ; \mathbb{R}^n)$

(Hint: $(u_i)^{-1} : U_i \to O_i, \ u = (u_1, \cdots u_n) \mapsto [u_1 : \cdots u_{i-1} : 1 : u_i : \cdots : u_n]$
well-defined 性に注意)

$n=1$ の場合のイメージ



Thm 12.2.2 :

$$\mathcal{A}_0 := \{ (O_i, U_i, u_i) \mid i = 1, \cdots, n+1 \} \in C^\infty\text{-atlas}(\mathbb{RP}^n ; \mathbb{R}^n)$$

特に $(\mathbb{RP}^n ; [\mathcal{A}_0])$ は C^∞-n-mfd.

Proof $\mathbb{RP}^n$ のハウスドルフ性は Thm 12.1.5.

$\mathcal{A}_0$ が C^∞-atlas であることを示せばよい.

示 ① $\bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \supset \mathbb{PR}^n$

② $\mathcal{A}_0$ 内の座標変換は C^∞級写像

① について ($① \bigcup_{i=1}^{n+1} O_i \supset \mathbb{R}P^n$)

$\forall l \in \mathbb{R}P^n$ をとる.

(示) $\exists i = 1, \cdots, n+1$, $l \in O_i$

$[x] = l$ となる $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ がとれるのでとる (Prop 12.1.2)

$\left(\begin{array}{c} \shortparallel \\ \pi(x) \end{array} \right)$

$x \neq 0$ より $x_i \neq 0$ となる $i = 1, \cdots, n+1$ がとれるのでとる.

(示) $l \in O_i := W_i$ i.e. $l \notin W_i := \{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid y_i = 0 \}$

いま $x_i \neq 0$ より $x \notin W_i$.

従って $\underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ x}}{l} \notin W_i$.

① 証明終

② について

$1 \leq i \lneq j \leq n+1$ とする。

(O_i, U_i, u_i) から (O_j, U_j, u_j) への座標変換を簡単のため

$$\tau_{ij} : u_i(O_i \cap O_j) \to u_j(O_i \cap O_j) \quad \text{と書く.}$$

$$u_i(O_i \cap O_j) = \{ u \in \mathbb{R}^n \mid u_{j-1} \neq 0 \}, \quad u_j(O_i \cap O_j) = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v_i \neq 0 \}$$

$$u \underset{\tau_{ij}}{\longmapsto} \frac{1}{u_{j-1}}(u_1, \cdots, u_{i-1}, 1, u_i, \cdots, u_{j-2}, u_j, \cdots, u_n)$$

τ_{ij} は C^∞ 級

（ほぼ同様に τ_{ji} も C^∞ 級）

② 証明終

図

C^∞級関数の例も挙げておく

i.e. $\forall r \in \mathbb{R}^\times$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
$f_i(rx) = r^k f_i(x)$

Thm 12.2.3 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

$f_1, f_2 : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ を 斉k次 C^∞級関数とし,

f_2 は $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ 上 零点を持たないとする.

このとき

$$f : \mathbb{R}P^n \to \mathbb{R}, \quad \ell = [x] \mapsto \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$$
$x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

は well-defined であり

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}P^n; [A_0]).$$

Ex 12.2.4 :

$$f : \mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}, \quad [x_1 : x_2 : x_3] \longmapsto \frac{2x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

← 斉2次

は well-defined で

$$f \in C^\infty(\mathbb{R}P^2 : [A_0])$$

Proof of Thm 12.2.3:

まず f の well-defined 性を示そう.

$^\forall x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ with $[x] = [y]$ をとる.

示 $$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(y)}{f_2(y)} \ (\in \mathbb{R})$$

$[x] = [y]$ より $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ で $x = \lambda y$ となるものが存在するのでとる.

いま f_1, f_2 は斉k次なので

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{f_1(\lambda y)}{f_2(\lambda y)} = \frac{\lambda^k f_1(y)}{\lambda^k f_2(y)} = \frac{f_1(y)}{f_2(y)}$$

これで f の well-defined 性が示された

次に $f \in C^\infty(\mathbb{R}P^n; [A_0])$ を示そう。

Thm 8.2.3 より 以下を示せば十分。

㊟ $i = 1, \cdots, n+1$, $f_{u_i} \in C^\infty(U_i)$

$\forall i = 1, \cdots, n+1$ をとる。

㊟ $f_{u_i} \in C^\infty(U_i)$

$$
\begin{array}{rcl}
f_{u_i} : U_i & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
\| & & \cup \\
\mathbb{R}^n & & \\
\cup & & \\
u & \longmapsto & f(u_i^{-1}(u)) = f([u_1 : \cdots : u_{i-1} : 1 : u_i : \cdots : u_n])
\end{array}
$$

$$
= \frac{f_1(u_1 \cdots u_{i-1}, 1, u_i, \cdots, u_n)}{f_2(u_1 \cdots u_{i-1}, 1, u_i, \cdots, u_n)}
$$

これは C^∞ 級（詳細略）

㊟

Section 12.3: Prop 12.1.5 について

試験範囲外

Thm 12.1.5 (再掲): $\mathbb{R}P^n$ は コンパクト ハウスドルフ 位相空間.

Hint となる命題 を いくつか 挙げて おく.

コンパクト性 について の Hint

Prop 12.3.1: $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ について

コンパクト

$$\pi(S^n) = \mathbb{R}P^n$$

ハウスドルフ性についてのHint：

Prop 12.3.2 Xを位相空間，Yを集合，$\pi : X \twoheadrightarrow Y$を全射とし，

Yに商位相を入れる．

また $\pi : X \twoheadrightarrow Y$ が開写像であるとする．

このとき次の2条件は同値

(i) Yはハウスドルフ

(ii) $\{ (x_1, x_2) \in X \times X \mid \pi(x_1) = \pi(x_2) \}$

は $X \times X$ の閉集合

直積位相

Lem 12.3.3 : $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$ は開写像

Lem 12.3.4 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^n$ について

$\{ (x_1, x_2) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \mid \pi(x_1) = \pi(x_2) \}$

は $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})$ の閉集合.