Section 13 : 接空間

C^∞-mfd の各点において接空間を定義する.

Part Ⅲ : 多様体上の微分論

- Section 13 : 接空間
- Section 14 : C^∞級写像
- Section 15 : 写像の微分
- Section 16 : 正則部分多様体
- Section 17 : ベクトル場とその flow (試験範囲外)

Section 13.1 : 接空間の定義

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \underset{\sim}{\mathcal{A}})$: C^∞-n-mfd

以降省略することが多い

$p \in M$

記号 :

$C^\infty(M) = C^\infty(M, \underset{\sim}{\mathcal{A}}) := \{ f \in C(M) \mid f$ は $\mathcal{A}$ 上 C^∞級 $\}$

以降省略することが多い.

↑

$\mathbb{R}$代数 ($\because$ Thm 8.3.2)

Def 13.1.1

$$T_pM := \left\{ \mathfrak{J} : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathfrak{J} \text{ は 線型,} \\ \mathfrak{J}(f \cdot g) = \mathfrak{J}(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot \mathfrak{J}(g) \\ \qquad\qquad \forall f, g \in C^\infty(M) \end{array} \right\}$$

M の p における接空間

$\mathfrak{J}$ は p におけるライプニッツ則を満たす

T_pM の元を "M の p における接ベクトル" という.

Prop 13.1.2 : T_pM は $\mathcal{L}(C^\infty(M), \mathbb{R})$ の線型部分空間.

Section 13.2：座標基底

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$p \in M$

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$

Def 13.2.1: 各 $i=1,\cdots,n$ について　$(f_u \in C^\infty(U))$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\quad f \mapsto \frac{\partial f_u}{\partial u_i}(u(p))$$

記号の乱用

地図 (O,U,u) 上で 第 i 偏微分

$$:= \lim_{h\to 0} \frac{f_u(u(p)+he_i) - f_u(u(p))}{h}$$

とおく.

($e_1 \cdots e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底)

Prop 13.2.2: $\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p \in T_pM \quad (i=1,\cdots,n)$

Thm 13.2.3: $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p\right\}_{i=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底.

証明は試験範囲外
(Section 13.4)

T_pM の (O,U,u) についての 座標基底

← 慣用語

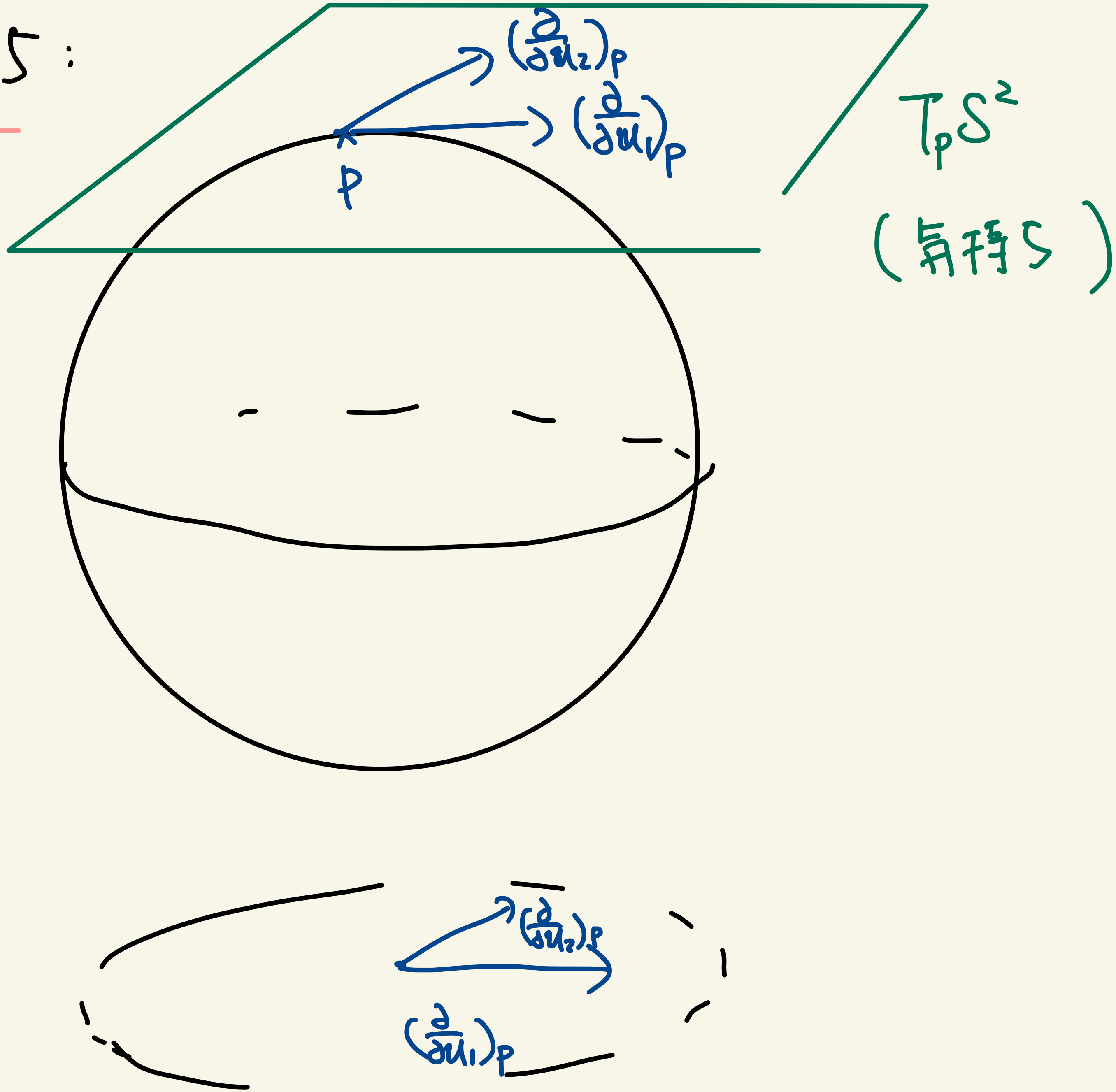
証明スライド

$\underline{\text{Cor } 13.2.4}$: $\dim T_pM = \underset{\sim}{n}$

し

$\leftarrow$ Mの"次元"

Ex 13.2.5:


$\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p$
$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p$
p
T_pS^2
(与持S)
$\left(\frac{\partial}{\partial u_2}\right)_p$
$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p$

Section 13.3 : 座標基底の基底変換

設定 :

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$p \in M$

$$\left.\begin{array}{l} (O, U, u) \\ (O', V, v) \end{array}\right. \in \mathcal{A} \text{ with } p \in O \cap O'$$

Recall :

$$T_{uv} : \underset{\underset{u(p)}{\rotatebox{90}{$\in$}}}{\overset{\text{open} \subset \mathbb{R}^n}{u(O \cap O')}} \to \overset{\text{open} \subset \mathbb{R}^n}{v(O \cap O')} : C^\infty \text{級}$$

Thm 13.3.1 : (証明は試験範囲外 : Section 13.7 へ)

Jacobi行列 $$(J\tau_{uv})_{u(p)} := \left(\frac{\partial(\tau_{uv})_i}{\partial u_j}(u(p)) \right)_{i,j=1,\cdots,n} \in M(n;\mathbb{R})$$

は T_pM の基底

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ から $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \right\}_{j=1,\cdots,n}$ への変換行列

i.e. $y = T_pM$ で $$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R})$$

と書いたとき

$$(J\tau_{uv})_{u(p)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "{\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right)}"] \arrow[d, "(J\tau_{uv})_{u(p)}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & T_pM \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "{\left(\left(\frac{\partial}{\partial v_1}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial v_n}\right)_p\right)}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ex 13.3.2 : C^∞-2・mfd $S^2 = (S^2, [\mathcal{A}_0])$ (Ex 10.2.4)

について

$p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in S^2$ とし

$(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$

$(O', V, v) = (O_2^+, U_2^+, u_2^+)$ $\in \mathcal{A}_0$ (Ex 7.3.2) を考えると

$p \in O \cap O'$.

T_pS^2 の基底として

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p\right\}_{i=1,2,\cancel{3}}$ と $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)\right\}_{i=1,2,\cancel{3}}$ がとれる.

$$\begin{array}{cccc} T_{uv} : & u(O \cap O') & \to & v(O \cap O') \\ & \rotatebox{90}{$=$} & & \rotatebox{90}{$=$} \\ & \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| < 1,\ u_1 > 0\} & & \{v \in \mathbb{R}^2 \mid \|v\| < 1,\ v_1 > 0\} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & u & \longmapsto & \left(\sqrt{1-u_1^2-u_2^2},\ u_2\right) \end{array}$$

に注意すると

$$u(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1) \in u(O \cap O')$$

$$(J\,T_{uv})_{u(p)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Q $v = 2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \in T_pM$ を

$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_p\right\}_{i=1,2}$ の1次結合で書くと？

A $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるので Thm 13.3.1 より

$$v = -3\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p$$

Section 13.4 : 接ベクトルの局所性

試験範囲外

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$p \in M$

Thm 13.4.1

$v \in T_pM$ とし, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ を

"$p \in {}^\exists \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $f_1|_\Omega = f_2|_\Omega$" となるものとする.

(p のまわりで等しい)

このとき $v(f_1) = v(f_2)$

Proof of Thm 13.4.1 :

$g := f_1 - f_2 \in C^\infty(M)$ とおく.

(示) $g(j) = 0$

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ で $g|_\Omega \equiv 0$ となるものがとれるのでとる.

∵ (f_1, f_2 の設定より)

$h : \Omega \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ とすると $h \in C^\infty(\Omega)$.

Thm 10.4.1 より $b \in C^\infty(M)$, $p \in \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$, $p \in D_p \underset{\text{closed}}{\subset} M$ であって

$$\begin{cases} b(x) = 1 & \text{if } x \in \Omega_p \\ D_p \subset \Omega \text{ かつ } b(x) = 0 & \text{if } x \notin D_p \end{cases}$$

となるものがとれるのでとる.

$\psi : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1 - b(x) \in C^\infty(M)$ とおく.

$\psi(p) = 0$ と $\psi(x) = 1$ if $x \notin \Omega$ に注意.

特に $g \cdot \psi = g$ on M.

$x \in \Omega$ のとき

$$(g \cdot \psi)(x) = \underbrace{g(x)}_{\substack{\| \\ 0}} \cdot \psi(x) = 0$$

$$= g(x)$$

$x \notin \Omega$ のとき

$$(g \cdot \psi)(x) = g(x) \cdot \underbrace{\psi(x)}_{\substack{\| \\ 1}} = g(x)$$

従って $J(g) = J(g \cdot \psi)$

$$= J(g) \cdot \underbrace{\psi(p)}_{\substack{\| \\ 0}} + \underbrace{g(p)}_{\substack{\| \\ 0}} \cdot J(\psi) = 0$$

∎

Section 13.5 : 開部分多様体の接空間

設定 : $M = (M ; \mathcal{A})$: C^∞- n - mfd.

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

↑ open submfd とみなす.

ゴール :

$T_p\Omega$ と T_pM が "同じ" であることを示す.

(Thm 13.5.4)

Prop 13.5.1 : $r : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega)$ は $\mathbb{R}$-alg hom.

$$f \mapsto f|_\Omega$$

Def 13.5.2 : 各 $\gamma \in T_p\Omega$ について

$\tilde{\gamma} : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \gamma(f|_\Omega)$ とする.

Prop 13.5.3 : $\tilde{\gamma} \in T_pM$ for any $\gamma \in T_p\Omega$

Thm 13.5.4 : $T_p\Omega \to T_pM$, $\eta \mapsto \tilde{\eta}$ は線型同型.

線型性は easy

単射性と全射性をそれぞれ示す.

単射性： $^\forall y \in T_p\Omega$ with $\tilde{y} = 0$ in T_pM を fix

(示) $y = 0$ in $T_p\Omega$

$^\forall f \in C^\infty(\Omega)$ を fix

(示) $y(f) = 0$

Thm 10.4.2 より $p \in \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$, $\tilde{f} \in C^\infty(M)$ であって

$f|_{\Omega_p} = \tilde{f}|_{\Omega_p}$ となるものがとれるのでとる.

いま $\tilde{y} = 0$ なので $\tilde{y}(\tilde{f}) = y(\tilde{f}|_\Omega) = 0$

ここで Thm 13.4.1 より $0 = y(\tilde{f}|_\Omega) = y(f)$ ∎

全射性 : $^\forall \xi \in T_pM$ を fix

(示) $^\exists \eta \in T_p\Omega$ s.t. $\tilde{\eta} = \xi$.

$\eta : C^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}, \quad h \mapsto \xi(\tilde{h})$ とおく.

ただし各 $h \in C^\infty(\Omega)$ に対し

$\tilde{h} \in C^\infty(M)$ は

“$p \in {}^\exists\Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ s.t. $h|_{\Omega_p} = \tilde{h}|_{\Omega_p}$”

$*_h$

を満たすものとする.

(Thm 10.4.2 より存在する)

η は well-defined (∵ Thm 13.4.1 より)

(示) $g \in T_p\Omega$ かつ $\tilde{g} = \xi$

まず g の線型性を示そう

$h, h_1, h_2 \in C^\infty(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ を fix

(示) $g(h_1+h_2) = g(h_1) + g(h_2)$ かつ $g(\lambda h) = \lambda g(h)$

$\tilde{h}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in C^\infty(M)$ であって $\begin{array}{l} \tilde{h} \\ \tilde{h}_1 \\ \tilde{h}_2 \end{array}$ は $\begin{array}{l} \bigstar_h \\ \bigstar_{h_1} \\ \bigstar_{h_2} \end{array}$ を満たすものとする.

このとき $\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2 \in C^\infty(M)$ は $\bigstar_{h_1+h_2}$ を満たすので

$$g(h_1+h_2) = \xi(\tilde{h}_1 + \tilde{h}_2) = \xi(\tilde{h}_1) + \xi(\tilde{h}_2) = g(h_1) + g(h_2)$$

また $\lambda\tilde{h}$ は $\bigstar_{\lambda h}$ を満たすので

$$g(\lambda h) = \xi(\lambda\tilde{h}) = \lambda\xi(\tilde{h}) = \lambda g(h)$$

次に η が p においてライプニッツ則を満たすことを示そう.

$h_1, h_2 \in C^\infty(\Omega)$ を fix

(示) $\eta(h_1 \cdot h_2) = \eta(h_1) \cdot h_2(p) + h_1(p) \cdot \eta(h_2)$

$\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in C^\infty(M)$ で $\tilde{h}_1$ は $\star_{h_1}$ を満たすものをとる.
$\tilde{h}_2$ は $\star_{h_2}$

このとき $\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2$ は $\star_{h_1 h_2}$ を満たすので

$$\begin{aligned}
\eta(h_1 \cdot h_2) &= \xi(\tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2) \\
&= \xi(\tilde{h}_1) \cdot \tilde{h}_2(p) + \tilde{h}_1(p) \cdot \xi(\tilde{h}_2) \\
&= \eta(h_1) \cdot h_2(p) + h_1(p) \cdot \eta(h_2)
\end{aligned}$$

最後に $\hat{\jmath} = \xi$ を示す

$\forall f \in C^{\infty}(M)$ をとる.

(示) $\tilde{\jmath}(f) = \xi(f)$

f は $\star_{f|_{\Omega}}$ を満たすので

$$\tilde{\jmath}(f) = \jmath(f|_{\Omega}) = \xi(f) .$$

∎

Section 13.6 : Thm 13.2.3 の証明

Thm 13.2.3 (再掲) : $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}_{i=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底.

Proof of Thm 13.2.3 :

Thm 13.5.4 より $T_pM \cong T_pO$ (as $\mathbb{R}$-vector spaces)

$\{ (\frac{\partial}{\partial x_i})_p : C^\infty(O) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f_u}{\partial x_i}(p) \}_{i=1,\cdots,n}$

が T_pO の基底であることを示せばよい.

Prop 10.6.1 より $C^\infty(O) \to C^\infty(U)$ は $\mathbb{R}$代数同型

$$f \mapsto f_u$$

また $ev_p : C^\infty(O;\mathcal{A}_0) \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(p)$

$ev_{u(p)} : C^\infty(U) \to \mathbb{R},\ g \mapsto g(u(p))$ について

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(O;\mathcal{A}_0) \arrow[rr, "\sim"] \arrow[dr, "ev_p"'] & \circlearrowleft & C^\infty(U) \arrow[dl, "ev_{u(p)}"] \\
& \mathbb{R} &
\end{tikzcd}$$

これより ← Section 4 の意味

$$T_{x(p)}U \to T_pO$$ は線型同型

（詳細略）

$$g \mapsto \hat{g} : C^\infty(O) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto g(f_x)$$

いま $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x(p)}\right\}_{i=1,\cdots,n}$ は $T_{x(p)}U$ の基底 (Cor 4.3.6)

より $\left\{\widehat{\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{x(p)}} = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right\}_{i=1,\cdots,n}$ は $T_{x(p)}O$ の基底

図

Section 13.7 : Thm 13.3.1 の証明

設定： $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M = (M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$p \in M$

(O, U, u)

(O', V, v) $\in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$

Thm 13.3.1 : (再掲)

Jacobi行列 $(J\tau_{uv})_{u(p)} := \left(\frac{\partial (\tau_{uv})_i}{\partial u_j}(u(p)) \right)_{i,j=1,\cdots,n} \in M(n;\mathbb{R})$

は T_pM の基底

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ から $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \right\}_{j=1,\cdots,n}$ への変換行列

i.e. $y = T_pM$ が $y = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} b_i \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$ $(a_i, b_i \in \mathbb{R})$

と書いたとき

$$(J\tau_{uv})_{u(p)} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

準備:

Lem 13.7.1 : 各 $i=1,\cdots,n_2$ について

$$\exists \tilde{v}_i \in C^\infty(M) \text{ s.t. } \left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)_p (\hat{v}_i) = \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & i\neq k \end{cases}$$

Hint : $v_i : O' \to \mathbb{R},\ y \mapsto (v(y))_i$ は C^∞級 on O'.

この v_i を Thm 10.4.2 で 延長すればよい.

Proof of Thm 13.3.1 : 以下を示せばよい.

(示) $$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(J\tau_{uv}\right)_{u(p)}\right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$$

$i = 1, \cdots, n$ を fix

Lem 13.7.1 の $\tilde{v}_i \in C^\infty(M)$ をとる.

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)_p (\tilde{v}_i) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases}$$ に注意すると

以下を示せば十分

(示) $$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p (\tilde{v}_i) = \left(\left(J\tau_{uv}\right)_{u(p)}\right)_{ij}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p (\tilde{v}_i) = \frac{\partial (\tilde{v}_i)_u}{\partial u_j}(u(p))$$

$$= \frac{\partial\, \tau_{uv}^{*} (\tilde{v}_i)_v}{\partial u_j}(u(p))$$

∵ 連鎖律 (Prop 5.1.7)

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial (\tilde{v}_i)_v}{\partial v_k}\Big(\underbrace{\tau_{uv}(u(p))}_{=\,v(p)}\Big) \frac{\partial (\tau_{uv})_k}{\partial u_j}(u(p))$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial v_k}\right)_p (\tilde{v}_i)}_{=\,\begin{cases} 1 & (i=k) \\ 0 & (i\neq k) \end{cases}} \cdot \left((J\tau_{uv})_{u(p)}\right)_{kj}$$

$$= \left((J\tau_{uv})_{u(p)}\right)_{ij}$$

∎