Section 14 : C^∞級写像

多様体間の C^∞級写像を定義する.

Part III : 多様体上の微分論

- Section 13 : 接空間
- Section 14 : C^∞級写像
- Section 15 : 写像の微分
- Section 16 : 正則部分多様体
- Section 17 : ベクトル場とその flow (試験範囲外)

Section 14.1 : C^∞級写像の定義

設定 : $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,2)$

$M_i := (M_i, \mathcal{A}_i)$: C^∞-n_i-mfd

記号 : $C^\infty(M_i)$: M_i 上の C^∞級関数全体のなす $\mathbb{R}$ 代数

Def 14.1.1 : 連続写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞級

$$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}} \quad \varphi^*(C^\infty(M_2)) \subset C^\infty(M_1)$$

Thm 14.1.2: 写像 $\varphi : M_1 \to M_2$（連続性は課さない）

証明は試験範囲外
(Section 14.4)

に対して以下の三条件は同値

(i) φ は C^∞ 級 in the sense of Def 14.1.1

$\Updownarrow$

(ii) $^\forall(O, U, u) \in \mathcal{A}_1$, $^\forall(O', V, v) \in \mathcal{A}_2$,

$\Updownarrow$

$$\varphi_{uv} : \underset{\underset{\text{open}}{\cup}\ \mathbb{R}^{n_1}}{u(O \cap \varphi^{-1}(O'))} \to \underset{\text{open}\ \underset{\subset}{}\ \mathbb{R}^{n_2}}{V} \quad : C^\infty \text{級 in the sense of Section 5}$$

$$u \mapsto v(\varphi(u^{-1}(u)))$$

(iii) $^\forall p \in M_1$, $^\exists(O, U, u) \in \mathcal{A}_1$, $^\exists(O', V, v) \in \mathcal{A}_2$

s.t. $p \in O \cap \varphi^{-1}(O')$ かつ

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V \quad : C^\infty \text{級}$$

$$u \mapsto v(\varphi(u^{-1}(u))) \text{ in the sense of Section 5}$$

Ex 14.1.3

Ex 7.3.2 のもの

Claim: $\varphi : S^2 \to \cancel{PR}^2\ \mathbb{R}P^2,\ x \mapsto [x]$ は C^∞ 級写像.

$S^2 = (S^2, [A_0])$

$\cancel{PR}^2\ \mathbb{R}P^2 = (\cancel{PR}^2\ \mathbb{R}P^2, [A_0])$

Thm 12.2.2 のもの

Thm 14.1.2 より 以下を示せば了':

(示) $\forall \varepsilon = \pm,\ \forall i = 1, \cdots, n+1,\ \forall j = 1, \cdots, n+1$

$(O, U, u) = (O_i^\varepsilon, U_i^\varepsilon, u_i^\varepsilon)$ ← Ex 7.3.2

$(O', V, v) = (O_i, U_i, u_i)$ とおくと ← Thm 12.2.2

$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V : C^\infty$ 級

$(\varepsilon, i, j) = (+, 1, 1)$ の場合のみやる：

$$(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$$

$$(O', V, v) = (O_1, U_1, u_1)$$

とおく

$$O \cap \varphi^{-1}(O') = O_1^+ \cap \varphi^{-1}(O_1) = O_1^+$$

要確認

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$$

$$u(O \cap \varphi^{-1}(O')) = U_1^+ = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| < 1\}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$u \longmapsto v(\varphi(u^{-1}(u))) = v([\sqrt{1-\|u\|^2} : u_1 : u_2])$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\|u\|^2}}(u_1, u_2)$$

これは C^∞ 級 (in the sense of Section 5)

メモ

$$O_1^+ = \{x \in S^2 \mid x_1 > 0\}$$

$$U_1^+ = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| < 1\}$$

$$u_1^+ : O_1^+ \to U_1^+$$

$$x \mapsto (x_2, x_3)$$

$$O_1 = \{\ell \in P\mathbb{R}^2 \mid \ell \notin W_1\}$$

$$(W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0\})$$

$$U_1 = \mathbb{R}^2$$

$$u_1 : O_1 \to U_1$$

$$[x] \mapsto \frac{1}{x_1}(x_2, x_3)$$

Ex 14.1.4 : $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd

$id_M : M \to M$: 恒等写像 は C^∞級

Section 14.2 : C^∞級写像の合成

設定

$n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 1, 2, 3)$

M_i : C^∞-n_i-mfd

$\varphi : M_1 \to M_2$
$\psi : M_2 \to M_3$: C^∞級

Thm 14.2.1 : $\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ は C^∞級

↑

Lem 14.2.2 : $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : C(M_3) \to C(M_1)$

Section 14.3：微分同相

設定：$n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,2)$

$M_i := (M_i, A_i)$：C^∞-n_i-mfd

Def 14.3.1：

C^∞級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が微分同相 (diffeomorphism)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 全単射で，逆写像も C^∞ 級

Ex 14.2.3 (試験範囲外)

$S^1 \to \cancel{PR^1}$ $\mathbb{R}P^1$ は well-defined

$(\cos\theta, \sin\theta) \mapsto \left[\cos\frac{\theta}{2} : \sin\frac{\theta}{2}\right]$ で微分同相

注: $n \geq 2$ のとき S^n と PR^n は微分同相ではない

(同相ですらない)

Ex 14.2.4：(試験範囲外)

Ex 10.2.5 の

$(M, [\mathcal{A}_0])$ と $(M, [\mathcal{B}_0])$ について $\left(M := \{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3 \} \subset \mathbb{R}^2 \right)$

恒等写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$, $x \mapsto x$ は $(M, [\mathcal{A}_0])$ から $(M, [\mathcal{B}_0])$ への全単射 C^∞ 級写像だが

逆写像 $\mathrm{id}_M : M \to M$, $x \mapsto x$ は $(M, [\mathcal{B}_0])$ から $(M, [\mathcal{A}_0])$ への C^∞ 級写像ではない。

しかし $\varphi : M \to M$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^{\frac{1}{3}}, x_1)$ は well-defined で $(M, [\mathcal{A}_0])$ から $(M, [\mathcal{B}_0])$ への微分同相。

Section 14.4 : Thm 14.1.2 の証明 (試験範囲外)

設定 : $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,2)$

$M_i := (M_i, \mathcal{A}_i) : C^\infty - n_i -$ mfd

まず次が成り立つ :

Thm 14.4.1 : $\varphi : M_1 \to M_2$ を C^∞ 級写像とする.

$\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M_1$, $\Theta \underset{\text{open}}{\subset} M_2$ が $\varphi(\Omega) \subset \Theta$ となるとき

$\varphi|_\Omega : \Omega \to \Theta$ も C^∞ 級写像

(ただし, Ω, Θ はそれぞれ M_1, M_2 の
開部分多様体とみなす)

Proof of Thm 14.4.1 :

$\varphi : M_1 \to M_2$ は連続なので

$\varphi|_\Omega : \Omega \to \Theta$ も連続

以下を示せばよい

(示) $\forall f \in C^\infty(\Theta)$, $(\varphi|_\Omega)^*(f) \in C^\infty(\Omega)$

$\forall f \in C^\infty(\Theta)$ をとる.

(示) $(\varphi|_\Omega)^*(f) \in C^\infty(\Omega)$

$\forall p \in \Omega$ をとる. Thm 10.3.3 より 以下を示せばよい

(示) $\exists_{p \in} \Omega_p \subset_{\text{open}} \Omega$ s.t. $((\varphi|_\Omega)^*(f))|_{\Omega_p} \in C^\infty(\Omega_p)$

Thm 10.4.2 より

$\varphi(p) \in \Theta_{\varphi(p)} \underset{\text{open}}{\subset} \Theta$, $\tilde{f} \in C^\infty(M_2)$ であって

$f|_{\Theta_{\varphi(p)}} = \tilde{f}|_{\Theta_{\varphi(p)}}$ となるようなものがとれるので.

$\Omega_p := \varphi^{-1}(\Theta_{\varphi(p)})$ とおくと $p \in \Omega_p \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$

(示) $((\varphi|_\Omega)^*(f))|_{\Omega_p} \in C^\infty(\Omega_p)$

いま $\tilde{f} \in C^\infty(M_2)$ かつ $\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞ 級なので

$\varphi^*(\tilde{f}) \in C^\infty(M_1)$

また $\tilde{f}|_{\Theta_{\varphi(p)}} = f|_{\Theta_p}$ より $\varphi^*(\tilde{f})|_{\Omega_p} = ((\varphi|_\Omega)^*(f))|_{\Omega_p}$.

従って Prop 10.3.4 より

$$((\varphi|_\Omega)^*(f))|_{\Omega_p} = \varphi^*(\tilde{f})|_{\Omega_p} \in C^\infty(\Omega_p)$$

∎

更に次も成り立つ

Thm 14.4.2 :

$\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M_1 の開被覆

$\{\Theta_\kappa\}_{\kappa\in K}$ を M_2 ―― とする.

写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ (連続性は課さない) について以下三条件は同値:

(i) $\varphi : M_1 \to M_2$ は C^∞ 級 in the sense of Def 14.1.1

$\Updownarrow$

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda, \forall \kappa \in K$

$$\begin{array}{rccl} \varphi_{\lambda,\kappa} : & \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa) & \to & \Theta_\kappa \\ & x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$$

は C^∞ 級 in the sense of Def 14.1.1

$\Updownarrow$

(ここに, $\Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa) \underset{\text{open}}{\subset} M_1$ は M_1 の open submfd

$\Theta_\kappa \underset{\text{open}}{\subset} M_2$ は M_2 の open submfd

とみなす.)

(iii) $\forall p \in M, \exists \lambda \in \Lambda, \exists \kappa \in K$

s.t. $p \in \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa)$ かつ $\varphi_{\lambda,\kappa}$ は C^∞ 級 in the sense of Def 14.1.1

Proof of Thm 14.4.2:

(i) $\Rightarrow$ (ii) は Thm 14.4.1 から従う.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) は easy

(iii) $\Rightarrow$ (i) を示す. (iii) を仮定する. (i) を示そう.

φ の連続性については (iii) の仮定と演習問題 71 から分かる (詳細略)

以下を示そう:

(示) $\forall f \in C^\infty(M_2)$, $\varphi^*(f) \in C^\infty(M_1)$

$^\forall p \in M_1$ をとる.

Thm 10.3.3 より 以下を示せばよい

示) $p \in {}^\exists \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M_1$ s.t. $(\varphi^*(f))|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$.

(iii) より

$p \in \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa)$ かつ $\varphi_{\lambda,\kappa}$ は C^∞ 級 となる $\lambda \in \Lambda, \kappa \in K$ が存在するのでとる.

$\Omega := \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa)$ とおくと $p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M_1$.

示) $(\varphi^*(f))|_\Omega \in C^\infty(\Omega)$

いま $\varphi_{\lambda,k} : \Omega \to \Theta_k$ は C^∞ 級で,

$x \mapsto \varphi(x)$

$f|_{\Theta_k} \in C^\infty(\Theta_k)$ (∵ Prop (0.3.4)) より

$(\varphi^*(f))|_\Omega = \varphi_{\lambda,k}^*(f|_{\Theta_k}) \in C^\infty(\Omega)$

要確認 ↑

図

Thm 14.1.2 を示そう：

Thm 14.1.2：写像 $\varphi : M_1 \to M_2$（連続性は課さない）

（再掲）

について以下の三条件は同値

(i) φ は C^∞ 級 in the sense of Def 14.1.1

$\Updownarrow$

(ii) $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_1$, $\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_2$,

$$\varphi_{uv} : \underbrace{u(O \cap \varphi^{-1}(O'))}_{\subset_{\text{open}} \mathbb{R}^{n_1}} \to \underbrace{V}_{\text{open} \subset \mathbb{R}^{n_2}} : C^\infty \text{級 in the sense of Section 5}$$

$$u \mapsto v(\varphi(u^{-1}(u)))$$

$\Updownarrow$

(iii) $\forall p \in M$, $\exists (O, U, u) \in \mathcal{A}_1$, $\exists (O', V, v) \in \mathcal{A}_2$

s.t. $p \in O \cap \varphi^{-1}(O')$ かつ

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V : C^\infty \text{級}$$

$$u \mapsto v(\varphi(u^{-1}(u))) \text{ in the sense of Section 5}$$

Thm 14.4.2 と以下の lemma から Thm 14.1.2 は従う.

Lem 14.4.3: $(O, U, u) \in \mathcal{A}_1$, $(O', V, v) \in \mathcal{A}_2$

以下は同値

(i) $\varphi_{OO'} : \begin{array}{ccc} O \cap \varphi^{-1}(O') & \to & O' \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ が C^∞ 級 in the sense of Def 14.1.1.

$\Updownarrow$

(ii) $\varphi_{uv} : \begin{array}{ccc} u(O \cap \varphi^{-1}(O')) & \to & V \\ u & \mapsto & v(\varphi(u^{-1}(u))) \end{array}$

が C^∞ 級 in the sense of Sections

Hint: $\begin{array}{ccc} C^\infty(O \cap \varphi^{-1}(O')) & \xrightarrow{\sim} & C^\infty(u(O \cap \varphi^{-1}(O'))) \\ f & \mapsto & f_u|_{O \cap \varphi^{-1}(O')} \end{array}$ など