Section 15 : 写像の微分

C^∞級写像の全微分を定義する.

Part Ⅲ : 多様体上の微分論

- Section 13 : 接空間
- Section 14 : C^∞級写像
- Section 15 : 写像の微分
- Section 16 : 正則部分多様体
- Section 17 : ベクトル場とその flow (試験範囲外)

Section 15.1 : 全微分の定義

設定 : $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i = 1, 2)$

$M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$: C^∞-n_i-mfd

$p \in M_1$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級写像

記号 : $\varphi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1)$, $f \mapsto f \circ \varphi$

Prop 15.1.1: 各 $\gamma \in T_pM_1$ について $\gamma \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}M_2$.

Def 15.1.2:
$$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$$
$$\gamma \mapsto \gamma \circ \varphi^*$$

φ の p における全微分

(total derivative)

Prop 15.1.3: $(d\varphi)_p$ は線型写像.

Ex 15.1.4 $(M, \mathcal{A})$: C^∞-n-mfd.

$\mathrm{id}_M : M \to M$ について

各 $p \in M$ において

$$d(\mathrm{id}_M)_p = \mathrm{id}_{T_pM} : T_pM \to T_pM$$

Section 15.2 : 全微分の行列表示

設定 : $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,2)$

$M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$: C^∞-n_i-mfd

$p \in M_1$

$\varphi : M_1 \to M_2$. C^∞級写像

$(O, U, \psi) \in \mathcal{A}_1$ with $p \in O$

$(O', V, \upsilon) \in \mathcal{A}_2$ with $\varphi(p) \in O'$

記号 : $\varphi_{\psi\upsilon} : \psi(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$ (C^∞級 : Thm 14.1.2)

$$u \mapsto \upsilon(\varphi(\psi^{-1}(u)))$$

Thm 15.2.1 :

Jacobi行列 $(J\varphi_{uv})_{u(p)} := \left(\dfrac{\partial (\varphi_{uv})_i}{\partial u_j} (u(p)) \right)_{\substack{i=1,\cdots,n_2 \\ j=1,\cdots,n_1}}$

は 線型写像 $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_pM_2$

の 座標基底 $\left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \right\}_{j=1,\cdots,n_1}$ of T_pM_1

$\left\{ \left(\dfrac{\partial}{\partial v_i}\right)_{\varphi(p)} \right\}_{i=1,\cdots,n_2}$ of T_pM_2

についての 表現行列

Hint : Thm 5.3.2 と同様. ただし Lem 13.7.1 を使う.

証明は試験範囲外

Ex 15.2.2 : Ex 14.1.3 の C^∞級写像

$\varphi : S^2 \to P\mathbb{R}^2,\ x \mapsto [x]$ について考える.

$p = (1,0,0)$, $(O, U, u) = (O_1^+, U_1^+, u_1^+)$
$(O', V, v) = (O_1, U_1, u_1)$ とおく.

このとき $p \in O \cap \varphi^{-1}(O')$, $u(p) = (0,0)$ であり

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$$

$$u(O \cap \varphi^{-1}(O')) = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid \|u\| < 1\}, \quad V = \mathbb{R}^2$$

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-\|u\|^2}}(u_1, u_2)$$

特に

$$(J\varphi_{uv})_{u(p)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となるので

Thm 15.2.1 より

$(d\varphi)_p : T_pS^2 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}P^2$ は線型同型

Section 15.3：合成の微分

設定： $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

$M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ ： C^∞-n_i-mfd　$(i=1,2,3)$

$p \in M_1$

$\varphi : M_1 \to M_2$ ： C^∞級写像

$\psi : M_2 \to M_3$ ：

Recall： $\psi \circ \varphi : M_1 \to M_3$ は C^∞級（Thm 14.2.1）

Thm 15.3.1:

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

as $T_pM_1 \to T_{(\psi\circ\varphi)(p)}M_3$

(Hint: Lem 14.2.2)

Section 15.4：逆写像定理

試験範囲外

設定：$n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,2)$

$M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$: C^∞-n_i-mfd

$p \in M_1$

$\varphi : M_1 \to M_2$. C^∞級写像

Recall：C^∞級写像 φ が微分同相 (diffeo)

(Def 14.3.1)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ は全単射かつ逆写像も C^∞級

Def 15.4.1 : $p \in M_1$ とする.

φ が p のまわりで局所微分同相 (locally diffeomorphic)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $p \in {}^{\exists}\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M_1$, $\varphi(p) \in {}^{\exists}\Theta \underset{\text{open}}{\subset} M_2$

s.t. $\varphi(\Omega) \subset \Theta$ かつ

$\varphi|_{\Omega} : \Omega \to \Theta$ が微分同相

Thm 15.4.2 (逆写像定理の多様体版)

$p \in M_1$ とする. 以下は同値

(i) φ が p のまわりで局所微分同相

$\Updownarrow$

(ii) $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ は線型同型

Hint: ユークリッド空間の場合の逆写像定理(後のページに書いておく)を使う

Ex 15.4.3: Ex 15.2.2 の $\varphi : S^2 \to \mathbb{R}P^2,\ x \mapsto [x]$ は

$p = (1,0,0)$ で $(d\varphi)_p$ は線型同型. 特に p のまわりで φ は局所微分同相

Cor 15.4.4: 全単射 C^∞ 級写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ について
以下は同値

(i) φ は微分同相

$\Updownarrow$

(ii) $\forall p \in M_1$, $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が
線型同型.

Hint: Thm 15.4.2 と Thm 14.4.2

ユークリッド空間のときの逆写像定理をメモしておく：

Thm 15.4.5 :

$p \in U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1}$, $V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$, $\varphi : U \to V$: C^∞級 (in the sense of Section 5)

$(d\varphi)_p : T_p U \to T_{\varphi(p)} V$: 線型同型

とする.

このとき $p \in {}^\exists U_p \underset{\text{open}}{\subset} U$

$\varphi(p) \in {}^\exists V_{\varphi(p)} \underset{\text{open}}{\subset} V$

r.f. $\varphi(U_p) \subset V_{\varphi(p)}$

かつ

$\varphi|_{U_p} : U_p \to V_{\varphi(p)}$ は全単射

かつ

逆写像 $(\varphi|_{U_p})^{-1} : V_{\varphi(p)} \to U_p$ は C^∞級

Section 15.5：逆写像定理の応用

試験範囲外

設定： $n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $(i=1,2)$

$M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$: C^∞-n_i-mfd

$p \in M_1$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級写像

ゴール： $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が全射 or 単射のとき，

$\varphi : M_1 \to M_2$ の p のまわりの様子が分かる

Thm 15.5.1 $n_1 \leq n_2$ とし

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が単射であるとする.

このとき $\forall \gamma : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$: 単射線型写像,

$\exists (O, U, u) \in \mathcal{A}_1$

$\exists (O', V, v) \in \mathcal{A}_2$

s.t.

意味

φ は p のまわりで γ と思える

$p \in O$, $u(p) = 0 \in U$, $\varphi(O) \subset O'$

ゼロベクトル

かつ $\varphi_{vu}(u) = \gamma(u)$ $(\forall u \in U)$

Thm 15.5.2 $n_1 \geq n_2 \geq 1$

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ が全射であるとする.

このとき $\forall \pi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$: 全射線型写像,

意味

φ は p のまわりで π と思える.

$^{\exists}(O, U, u) \in \mathcal{A}_1$

$^{\exists}(O', V, v) \in \mathcal{A}_2$ s.t.

$p \in O$, $u(p) = 0 \in U$, $\varphi(O) \subset O'$

ゼロベクトル

かつ $\varphi_{uv}(u) = \pi(u)$ $(^{\forall}u \in U)$

Thm 15.5.1 は次の Prop と逆写像定理から従う.(詳細略)

Prop 15.5.3: $n_1 \leq n_2$ とする.

$$p \in U_1 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1},$$

$\varphi : U_1 \to \mathbb{R}^{n_2}$: C^∞級 with $(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n_2}$: 単射

$\gamma : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}$: 線型単射 とする.

このとき $\exists V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$, $\exists \tilde{\varphi} : V \to \mathbb{R}^{n_2}$: C^∞級 s.t.

$\gamma(U_1) \subset V$ かつ $\tilde{\varphi} \circ (\gamma|_{U_1}) = \varphi$

かつ $(d\tilde{\varphi})_{\gamma(p)} : T_{\gamma(p)}V \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n_2}$

は線型同型.

図式

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^{n_1} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, phantom, "\cup"] & \mathbb{R}^{n_2} \arrow[d, phantom, "\cup\ \text{open}"] \\
U_1 \arrow[r, "\gamma|_{U_1}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & V \arrow[d, "\tilde{\varphi}"] \\
& \mathbb{R}^{n_2}
\end{tikzcd}$$

Proof of Prop 15.5.3（概略）:

$\gamma(\mathbb{R}^{n_1}) \subset \mathbb{R}^{n_2}$ の補空間 W を fix.

$\mathbb{R}^{n_2} = \gamma(\mathbb{R}^{n_1}) \oplus W = \gamma(\mathbb{R}^{n_1}) \times W$ と書ける.

$V := \gamma(U_1) \times W \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_2}$ とおくと, $\gamma(U_1) = \gamma(U_1) \times \{0\} \subset V$.

$(d\varphi)_p(T_pU_1)$ の $T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n_2} \cong \mathbb{R}^{n_2}$ における補空間 $\tilde{W}$ も fix

$\dim W = n_2 - n_1 = \dim \tilde{W}$ より

$A : W \xrightarrow{\sim} \tilde{W}$: 線型同型 がとれるのでとる.

このとき

$$\tilde{\varphi} : V \to \mathbb{R}^{n_2}$$
$$(\gamma(u), w) \mapsto \varphi(u) + Aw$$

とおくと条件を満たす.

Thm 15.5.2 は 次の Prop と 逆写像定理から 従う.(詳細略)

Prop 15.5.4: $n_1 \geq n_2$ とする.

$$p \in U_1 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1},$$

$$\varphi : U_1 \to \mathbb{R}^{n_2} : C^\infty \text{級 with } (d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^{n_2} : \text{全射}$$

$$\pi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2} : \text{線型全射} \quad \text{とする}.$$

このとき $\exists\, \hat{\varphi} : U_1 \to \mathbb{R}^{n_1} : C^\infty$ 級

s.t. $\pi \circ \hat{\varphi} = \varphi$

かつ

$(d\hat{\varphi})_p : T_pU_1 \to T_{\hat{\varphi}(p)}\mathbb{R}^{n_1}$

は 線型同型

図式

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\hat{\varphi}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \mathbb{R}^{n_2} \\
\mathbb{R}^{n_1} \arrow[ur, "\pi"'] &
\end{tikzcd}$$

Proof of Prop 15.5.4（概略）:

$\mathrm{Ker}\,\pi \subset \mathbb{R}^{n_1}$ の補空間 W を fix

$\mathbb{R}^{n_1} = \mathrm{Ker}\,\pi \oplus W = \mathrm{Ker}\,\pi \times W$ と書ける.

$\pi|_W : W \to \mathbb{R}^{n_2}$ は線型同型となる.

$$\begin{array}{l} \mathbb{R}^{n_1} = \mathrm{Ker}\,\pi \times W \\ \cup \end{array}$$

$$\tilde{\varphi} : \underset{\substack{\| \\ \mathrm{Ker}\,\pi \times W}}{U_1 \to \mathbb{R}^{n_1}}, \quad u = (\underbrace{u_1}_{\in \mathrm{Ker}\,\pi}, \underbrace{u_2}_{\in W}) \mapsto (u_1, (\pi|_W)^{-1}(\varphi(u)))$$

とおけば条件を満たす.