Section 16 : 正則部分多様体

Part Ⅲ : 多様体上の微分論

- Section 13 : 接空間
- Section 14 : C^∞級写像
- Section 15 : 写像の微分
- Section 16 : 正則部分多様体
- Section 17 : ベクトル場とその flow (試験範囲外)

Section 16.1：正則部分多様体

設定：$n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n \geq k$.

$M = (M, A_M)$：C^∞-n-mfd.

$S \subset M$

open とは限らない

相対位相でハウスドルフ位相空間とみなす.

記号

$\iota : S \to M$：包含写像

Def 16.1.1 : $\mathcal{A}_S$: S 上の極大 k 次元 C^∞-atlas とする.

C^∞-k-mfd $(S, \mathcal{A}_S)$ が $M = (M, \mathcal{A}_M)$ の

k 次元正則部分多様体

regular submanifold

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 包含写像 $\iota : S \to M$ が C^∞ 級

(w.r.t. $\mathcal{A}_S, \mathcal{A}_M$)

かつ

$\forall p \in S$, $(d\iota)_p : T_pS \to T_pM$

が単射

(しばしば "$T_pS \subset T_pM$" とみなす.)

Ex 16.1.2 : 開部分多様体は正則部分多様体

Ex 16.1.3 : $\mathbb{R}^{n+1}$ を Ex 10.2.3 の意味で C^∞-$(n+1)$-mfd とみなす.

このとき $\mathcal{S}^n = (S^n, [\mathcal{A}_0])$ (Ex 10.2.4) は

$\mathbb{R}^{n+1}$ の正則部分多様体

Thm 16.1.4 : k次元正則部分多様体の構造は存在するなら一意

証明は試験範囲外
(Section 16.2)

i.e.

$\mathcal{A}_S^1, \mathcal{A}_S^2$: 極大 k 次元 C^∞-atlas on S

$(S, \mathcal{A}_S^1)$, $(S, \mathcal{A}_S^2)$ が共に $(M, \mathcal{A}_M)$ の正則部分多様体
とする.

このとき $\mathcal{A}_S^1 = \mathcal{A}_S^2$.

Prop 16.1.5 : $(S, \mathcal{A}_S)$: k次元正則部分多様体 in $M = (M, \mathcal{A}_M)$

$L = (L, \mathcal{A}_L)$: C^∞-l-mfd

$\varphi : M \to L$: C^∞級写像とする.

このとき

$$\varphi|_S : S \to L \quad \text{は}\ C^\infty\text{級} \quad (\text{w.r.t. } \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_S)$$
$$x \mapsto \varphi(x)$$

Hint : $\varphi|_S = \underbrace{\varphi}_{C^\infty} \circ \underbrace{\iota}_{C^\infty}$

Thm 16.1.6 : $(S, \mathcal{A}_S)$: k次元正則部分多様体 in $M = (M, \mathcal{A}_M)$

証明は試験範囲外
(Section 16.3)

$L = (L, \mathcal{A}_L)$: C^∞-l-mfd

$\varphi : L \to M$: C^∞級写像

s.t. $\varphi(L) \subset S$ とする.

このとき

$$\varphi_S : L \to S \quad \text{は } C^\infty\text{級} \ (\text{w.r.t. } \mathcal{A}_L, \mathcal{A}_S)$$
$$x \mapsto \varphi(x)$$

Section 16.2 : 正則値とその逆像

設定 : $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n_1 \geq n_2$

M_i : C^∞-n_i-mfd $(i = 1, 2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級

Def 16.2.1 : $q \in M_2$ が φ の正則値 (regular value)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in \varphi^{-1}(\{q\})$,

$(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_qM_2$ が全射

Thm 16.2.2

$q \in M_2$ が φ の正則値であるとする．

$S := \varphi^{-1}(\{q\}) \subset M_1$ は

$(n_1 - n_2)$ 次元正則部分多様体

の構造を（一意に）持つ．

(Thm 16.1.6)

証明は
試験範囲外
(Section 16.3)

また各 $p \in S$ において

$$T_pS = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p \quad \text{in } T_pM_1$$

正確には $(d\iota)_p(T_pS)$ のこと．

ただし $\iota : S \to M_1$ は包含写像

Ex 16.2.3 :

C^∞級写像 $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i^2$

について考える.

Claim $q = 1 \in \mathbb{R}$ は φ の正則値

∵ $^\forall p \in S := \varphi^{-1}(\{1\})$ をとる. $p \neq 0$ に注意.

示 $(d\varphi)_p : T_p\mathbb{R}^3 \to T_q\mathbb{R}$ が全射

3次元 1次元

i.e. $\operatorname{rank}(d\varphi)_p = 1$

Section 5 の意味と思っておく

いま Jacobi 行列 $(J\varphi)_p = \begin{pmatrix} 2p_1 & 2p_2 & 2p_3 \end{pmatrix}$

は $(d\varphi)_p$ の表現行列 w.r.t 座標基底 $(\because$ Thm 5.3.2 $)$

なので

$$\mathrm{rank}\,(d\varphi)_p = \mathrm{rank}\,(J\varphi)_p = 1$$

$(\because p \neq 0)$

□

これより

$S := \varphi^{-1}(\{8\}) \subset \mathbb{R}^3$ は Thm 16.2.2 より

S は $\mathbb{R}^3$ の $\overset{=3-1}{2}$ 次元正則部分多様体となる.

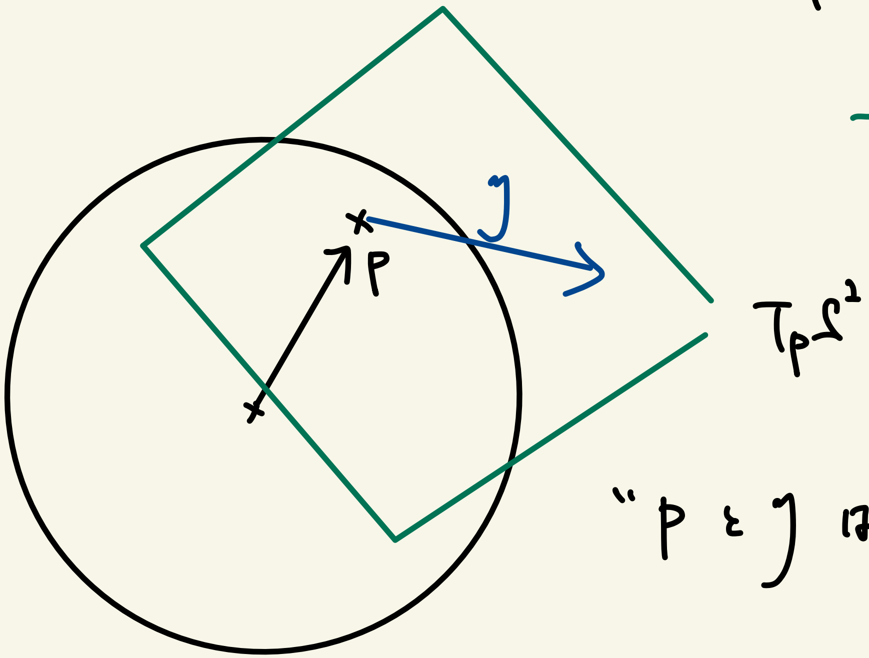
これは $(S^2, [A_0])$ のことである (cf. Ex 16.1.3)

また 各 $p \in S = S^2$ について

$$T_pS^2 = \mathrm{Ker}\,(d\varphi)_p = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; (J\varphi)_p \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\left(\begin{matrix} \shortparallel \\ (d\iota)_p(T_pS^2) \end{matrix} \right)$$

$$= \left\{ \underbrace{\sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}}_{\text{“}p\text{の直交補空間”}} \right\}$$



“p と y は直交する”

Ex 16.2.4 C^∞級写像 試験範囲外

$$\psi : S^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_3$$

について考える.

Claim $q = 0 \in \mathbb{R}$ は ψ の正則値

∵ $\forall p \in C := \psi^{-1}(\{q\}) \subset S^2$ をとる. $(p_1, p_2) \neq (0,0)$ に注意.

示 $(d\psi)_p : \underbrace{T_p S^2}_{2次元} \to \underbrace{T_q \mathbb{R}}_{1次元}$ が全射

$(\Leftrightarrow \dim \mathrm{Ker}(d\psi)_p = 1)$

ここで $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_3$ とおくと C^∞級で

$$\tilde{\psi}|_{S^2} = \psi.$$

特に $(d\psi)_p = (d\tilde{\psi})_p|_{T_p S^2}$

$(d\tilde{\psi})_p$ の表現行列 w.r.t. 座標基底 $(J\tilde{\psi})_p$ は

$$(J\tilde{\psi})_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ となる.

特に $$\mathrm{Ker}\,(d\tilde{\psi})_p = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; a_3 = 0 \right\}$$

Ex (6.2.3 より

$$T_pS^2 = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}$$

従って

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\,(d\psi)_p &= \left(T_pS^2 \cap \mathrm{Ker}\,(d\tilde{\psi})_p \right) \\ &= \left\{ \sum_{i} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; a_3 = 0 \text{ かつ } \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right\}\end{aligned}$$

特に $\dim \mathrm{Ker}\,(d\psi)_p = 1$ $\left(\because \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

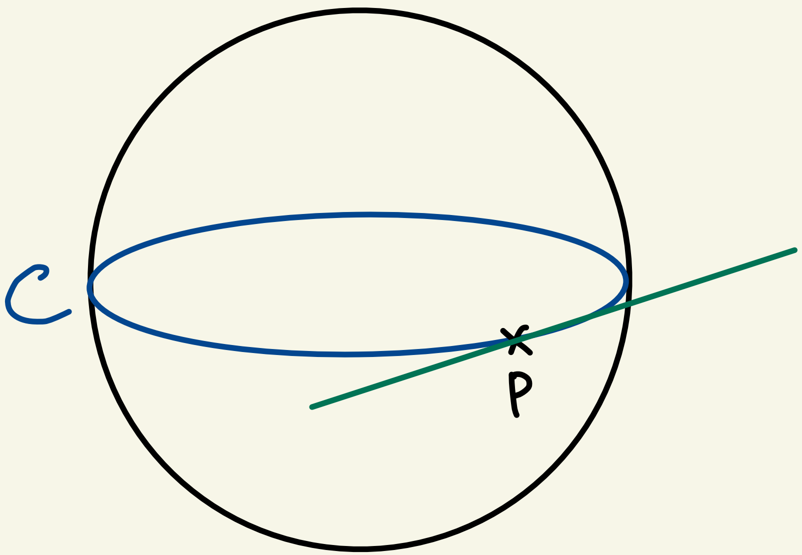
□

これより $C \subset S^2$ は Thm 16.2.2 より 1次元正則部分多様体

(これは Ex 16.1.4 のもの)

また各 $p \in C$ について

$$T_pC = \mathrm{Ker}(d\psi)_p = \left\{ \sum_i a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \;\middle|\; a_3 = 0 \text{ かつ } p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$



Section 16.3 : Thm 16.1.5, Thm 16.1.6, Thm 16.2.2 の証明

試験範囲外

しばらくの設定：

設定 : $n, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n > k$.

$M = (M, A_M)$: C^∞-n-mfd.

$S \subset M$

open とは限らない

相対位相でハウスドルフ位相空間とみなす.

記号

$\iota : S \to M$: 包含写像

記号 : $\gamma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (u_1, \cdots u_k, 0 \cdots 0)$

単射線型写像

Prop 16.3.1 : $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $U_0 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^m$ とする.

写像 $\phi : U_0 \to \mathbb{R}^k$ について

$\gamma \circ \phi : U_0 \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級 であるとする.

(in the sense of Sections)

このとき $\phi : U_0 \to \mathbb{R}^k$ は C^∞ 級

Hint Prop 5.1.5

Def 16.3.2

$(O, U, u) \in \mathcal{LC}(S;\mathbb{R}^k)$ が regular in $(M, \mathcal{A}_M)$

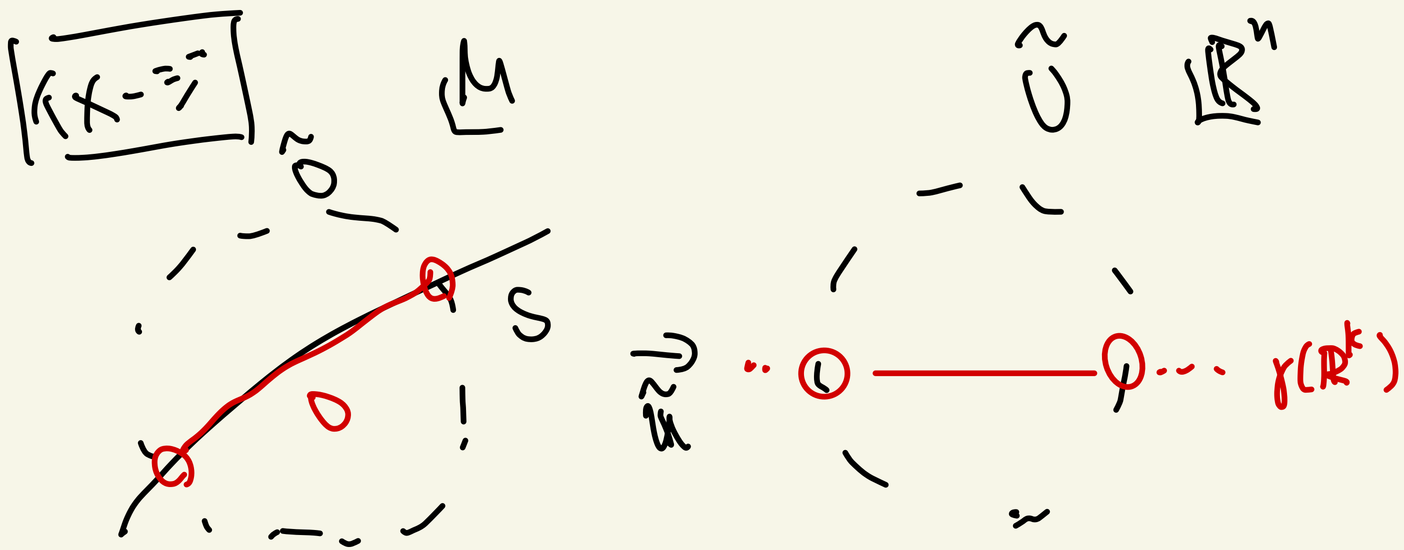
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $^{\exists}(\hat{O}, \hat{U}, \tilde{u}) \in \mathcal{A}_M$ s.t.

$O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\tau_{u\tilde{u}}(u) = \gamma(u)$ $({}^{\forall}u \in U)$

$$\tau_{u\tilde{u}}(u) = \tilde{u}(u^{-1}(u))$$

図式

$$\begin{array}{ccccc}
 & S & \xrightarrow{\iota} & M \\
 & \cup & \circlearrowleft & \cup \\
S \cap O' = & O & \longrightarrow & \tilde{O} \\
u & \downarrow\wr & \circlearrowleft\ \tau_{u\tilde{u}} & \downarrow\wr \\
 & U & \longrightarrow & \tilde{U} \\
\text{open} & \cap & \circlearrowleft & \cap & \text{open} \\
 & \mathbb{R}^k & \xrightarrow[\gamma]{} & \mathbb{R}^n
\end{array}$$



Prop 16.3.3 $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{LC}(S; \mathbb{R}^k)$ が regular in $(M, \mathcal{A}_M)$ とする.

このとき $T_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$ は C^∞ 級

Proof : 演習問題 74 と Prop 16.3.1 より 以下を示せばよい

示 $\tilde{T}_{uv} : u(O \cap O') \to \mathbb{R}^n$ が C^∞ 級

$u \mapsto \gamma(v(u^{-1}(u)))$

(O, U, u), (O', V, v) は regular in $(M, \mathcal{A}_M)$ より

$(\hat{O}, \hat{U}, \hat{u})$, $(\tilde{O}', \hat{V}, \tilde{v}) \in \mathcal{A}_M$ を

$O = S \cap \hat{O}$ かつ $\iota_{u\hat{u}}(u) = \gamma(u)$ $(\forall u \in U)$

$O' = S \cap \tilde{O}'$ かつ $\iota_{v\tilde{v}}(v) = \gamma(v)$ $(\forall v \in V)$

となるようにとれるのでとる.

ここで各 $u \in u(O \cap O')$ について $\gamma(u) \in \hat{u}(\hat{O} \cap \tilde{O}')$ に注意すると

"$\hat{u}(\underbrace{u^{-1}(u)}_{\in O \cap O' = S \cap \hat{O} \cap \tilde{O}'})$

$$
\begin{aligned}
\tau_{\hat{u}\tilde{v}}(\gamma(u)) &= \tau_{\hat{u}\tilde{v}}(\iota_{u\hat{u}}(u)) \\
&= \tilde{v}(\hat{u}^{-1}(\hat{u}(u^{-1}(u)))) \\
&= \tilde{v}(u^{-1}(u)) \\
&= \tilde{v}(v^{-1}(v(u^{-1}(u)))) \\
&= \iota_{v\tilde{v}}(\tau_{uv}(u)) = \gamma(\tau_{uv}(u)) = \tilde{\tau}_{uv}(u)
\end{aligned}
$$

これより

の C^∞級

る

$$\tilde{\tau}_{uu} = \left(\tau_{\hat{u}\tilde{u}} : \hat{u}(O\cap O') \to \mathbb{R}^n\right) \circ \left(\gamma|_{u(O\cap O')} : \underset{\text{open} \subset \mathbb{R}^k}{u(O\cap O')} \to \underset{\text{open} \subset \mathbb{R}^n}{\hat{u}(O\cap O')}\right)$$

より $\tilde{\tau}_{uu} : u(O\cap O') \to \mathbb{R}^n$ も C^∞級.

(∵ Thm 5.4.1) ■

Prop 16.3.4:

$(S, \mathcal{A}_S)$ が $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体とする.

このとき $^\forall q \in S$, $^\exists (O, U, u) \in \mathcal{A}_S$ s.t.

$q \in O$ かつ (O, U, u) は regular in $(M, \mathcal{A}_M)$

Proof: $^\forall q \in S$ をとる.

Thm 15.5.1 より $(O, U, u) \in \mathcal{A}_S$
$(O', V, v) \in \mathcal{A}_M$ であって

$q \in O$ かつ $\underset{O}{\overset{\shortparallel}{\iota(O)}} \subset O'$ かつ $\iota_{v,u}(u) = \gamma(u)$ $(^\forall u \in U)$

となるものがとれるのである.

$O \underset{\text{open}}{\subset} S$ より $O = S \cap \Omega$ となる $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ がとれるのでとる.

$$\tilde{O} := \Omega \cap O' \underset{\text{open}}{\subset} M$$

$$\hat{U} := \varphi(\Omega \cap O') \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$$

$$\hat{\varphi} := \varphi|_{\Omega \cap O'} : \tilde{O} \xrightarrow{\sim} \hat{U}$$ とおく.

Lem 10.5.1 より $(\tilde{O}, \hat{U}, \hat{\varphi}) \in A_M$.

(示) $O = S\cap\tilde{O}$ かつ $\tau_{u\tilde{u}}(u) = \gamma(u)$ $(\forall u\in U)$

まず $S\cap\tilde{O} = S\cap\Omega\cap O' = O\cap O' = O$.

次に $u\in U$ について

$$\tau_{u\hat{u}}(u) = \hat{u}\big(\underbrace{u^{-1}(u)}_{\in O\subset\tilde{O} = \Omega\cap O'}\big) = v\big(u^{-1}(u)\big) = \tau_{uv}(u) = \gamma(u)$$ □

Thm 16.1.5 は次の Thm から示う.

Thm 16.3.5

$$\mathcal{A}_S^{reg} := \{ (O, U, u) \in LC(S; \mathbb{R}^k) \mid (O,U,u) \text{ は regular in } (M, \mathcal{A}_M) \}$$

とおく.

(1) $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_S^{reg}} O \neq S$ のとき, S は $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体の構造を持たない.

(2) $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in\mathcal{A}_S^{reg}} O = S$ とする.

このとき $\mathcal{A}_S^{reg}$ は S 上の k 次元 C^∞-atlas であり

$(S, [\mathcal{A}_S^{reg}])$ は $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体

また $(S, \mathcal{A}_S)$ が $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体

となるならば $\mathcal{A}_S = [\mathcal{A}_S^{reg}]$.

Proof of Thm 16.3.5

(1) : Prop 16.3.4 から従う.

(2) : $\displaystyle\bigcup_{(O,U,u)\in A_S^{reg}} O = S$ を示す.

$A_S^{reg} \in C^\infty\text{-atlas}(S;\mathbb{R}^k)$ となることは Prop 16.3.3 から従う.

$(S,[A_S^{reg}])$ が (M,A_M) の k 次元正則部分多様体 となることを示そう.

示1 $\iota : S \to M$: C^∞ 級

示2 $d\iota_p : T_pS \to T_pM$: 単射

regular in (M,A_M) の性質から従う (詳細略)

次に $(S, \mathcal{A}_S)$ が $(M, \mathcal{A}_M)$ の k 次元正則部分多様体とする。

$\mathcal{A}_S = [\mathcal{A}_S^{reg}]$ を示そう。

Prop 16.3.4 より

$\mathcal{A}_S^{reg} \cap \mathcal{A}_S$ が S 上の C^∞-atlas であることが分かる。

$\mathcal{A}_S$, $[\mathcal{A}_S^{reg}]$ はそれぞれ $\mathcal{A}_S^{reg} \cap \mathcal{A}_S$ を含む極大 C^∞-atlas

であるから Thm 9.1.6 より $\mathcal{A}_S = [\mathcal{A}_S^{reg}]$.

⊠

Thm 16.1.6 (再掲) : $(S, \mathcal{A}_S)$: k 次元正則部分多様体 in $M = (M, \mathcal{A}_M)$

$L = (L, \mathcal{A}_L)$: C^∞-l-mfd

$\varphi : L \to M$: C^∞ 級写像

s.t. $\varphi(L) \subset S$ とする.

このとき

$\varphi_S : L \to S$ は C^∞ 級 (w.r.t. $\mathcal{A}_L, \mathcal{A}_S$)

$x \mapsto \varphi(x)$

Proof of Thm 16.1.6

$^\forall p \in L$ をとる.

Thm 14.1.2 より 以下を示せばよい

㊟ $^\exists(O_L, U_L, \varphi_L) \in \mathcal{A}_L$, $^\exists(O, U, \varphi) \in \mathcal{A}_S$ s.t.

$p \in O_L \cap \varphi_S^{-1}(O)$ かつ

$(\varphi_S)_{\varphi_L \varphi} : \varphi_L(O_L \cap \varphi_S^{-1}(O)) \to U$ は C^∞ 級

Prop 16.3.3 より

$(O, U, u) \in \mathcal{A}_S$ であって

$\varphi(p) \in O$ かつ (O, U, u) は regular in $(M, \mathcal{A}_M)$

となるものがとれるのである.

特に $(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{u}) \in \mathcal{A}_M$ であって

$O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\tau_{u\tilde{u}}(u) = \gamma(u) \ (\forall u \in U)$

となるものがとれるのである.

$p \in \varphi^{-1}(\tilde{O}) = \varphi_S^{-1}(0) \underset{\text{open}}{\subset} L$ に注意

$(O_L, U_L, \mathfrak{u}_L) \in \mathcal{A}_L$ であって $p \in O_L \subset \varphi_S^{-1}(0)$ となるものを fix.

(Lem 10.5.1 より
そのようなの $(O_L, U_L, \mathfrak{u}_L)$
が存在)

(示) $(\varphi_S)_{\mathfrak{u}_L \mathfrak{u}} : \mathfrak{u}_L(O_L \cap \varphi_S^{-1}(0)) \to U$ は C^∞ 級

$$u \mapsto \mathfrak{u}(\varphi_S(\mathfrak{u}_L^{-1}(u)))$$

($\underset{\text{Prop 5.1.1}}{\Leftrightarrow}$ $((\varphi_S)_{\mathfrak{u}_L \mathfrak{u}})_i \in C^\infty(\mathfrak{u}(O_L \cap \varphi_S^{-1}(0)))$ $(\forall i = 1, \ldots, k)$)

$\varphi : L \to M$ は C^∞ 級なので

$$\varphi_{u_L \tilde{u}} : u_L\left(O_L \cap \overset{\varphi_S^{-1}(O)}{\overset{\shortparallel}{\varphi^{-1}(\tilde{O})}}\right) \to \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$$

$$u \mapsto \tilde{u}(\varphi(u_L^{-1}(u)))$$

は C^∞ 級 ($\because$ Thm 14.1.2)

ここで

$= \iota \circ \varphi_S : L \to M$ 及び

$\tilde{u} \circ (\iota|_O) = (\iota_{u\tilde{u}}) \circ u = (\gamma|_U) \circ u : O \to \tilde{U}$ に注意すると

$$\varphi_{u_L \tilde{u}} = (\gamma|_U) \circ (\varphi_S)_{u_L u}$$

特に $u \in \mathcal{U}_L(O_L \cap \varphi^{-1}(\tilde{O})) = \mathcal{U}_L(O_L \cap \varphi_s^{-1}(0))$ に対し

$$(\varphi_{\mathcal{U}_L\tilde{\mathcal{U}}})(u) = \left(((\varphi_s)_{\mathcal{U}_L\mathcal{U}})_1(u), \dots, ((\varphi_s)_{\mathcal{U}_L\mathcal{U}})_k(u), 0, \dots, 0 \right)$$

$\varphi_{\mathcal{U}_L\tilde{\mathcal{U}}}$ は C^∞ 級なので $((\varphi_s)_{\mathcal{U}_L\mathcal{U}})_i$ は C^∞ 級関数 $(i=1,\dots,k)$

(∵ Prop 5.1.3)

∎

以降の設定：

設定：$n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ with $n_1 \geq n_2$

M_i : C^∞-n_i-mfd $(i = 1, 2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級

Thm 16.2.2 $q \in M_2$ が φ の正則値であるとする.

(再掲) $S := \varphi^{-1}(\{q\}) \subset M_1$ は

$(n_1 - n_2)$ 次元正則部分多様体

の構造を(一意に)持つ.

Thm 16.1.6

また各 $p \in S$ において

$$T_pS = \mathrm{Ker}(d\varphi)_p \quad \text{in } T_pM_1$$

正確には $(d\iota)_p(T_pS)$ のこと.

ただし $\iota : S \to M_1$ は包含写像

Proof of Thm 16.2.2. : $k := n_1 - n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とおく.

Thm 16.3.5 より以下を示せばよい.

(示) ${}^\forall p \in S$, ${}^\exists (O, U, u) \in \mathcal{LC}(S : \mathbb{R}^k)$
s.t. $p \in O$ かつ (O, U, u) は regular in (M_1, A_1)

${}^\forall p \in S$ をとる.

$\varphi(p) = q$ かつ
$(d\varphi)_p : T_p M_1 \to T_q M_2$ が全射であることに注意

$\pi : \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2},\ u \mapsto (u_{k+1}, \cdots, u_{n_1})$ $\quad (k = n_1 - n_2)$

全射線型

$\Psi : \operatorname{Ker} \pi \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^k,\ u \mapsto (u_1, \cdots, u_k)$ とおく.

$(\Psi^{-1} = \gamma : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n_1} ; u \mapsto (u_1 \cdots u_k, 0 \cdots 0))$

Thm 15.5.2 より) $(\tilde{O}, \tilde{U}, \tilde{u}) \in A_1,\ (O', V, v) \in A_2$ であって

$p \in \tilde{O}$ かつ $\tilde{u}(p) = 0 \in \tilde{U}$ かつ $\varphi(\tilde{O}) \subset O'$

かつ $\varphi_{\tilde{u}v}(u) = \pi(u)\ (\forall u \in \tilde{U})$

となるものがとれるのである.

特に $v(q) = v(\varphi(p)) = v(\varphi(\tilde{u}^{-1}(0))) = \varphi_{\tilde{u}v}(0)$

$= \pi(0) = 0$.

$p \in O := S \cap \tilde{O} \underset{\text{open}}{\subset} S$ とおく.

$U := \Phi(\underbrace{\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi}_{\text{open in } \operatorname{Ker}\pi}) \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$

<u>Claim</u>: $\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi = \tilde{u}(S \cap \tilde{O})$

$\subset$ $\forall u \in \hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi$ をとる.

$v(\varphi(\tilde{u}^{-1}(u))) = \varphi_{\tilde{u}v}(u) = \pi(u) = 0 = v(q)$ より

$\varphi(\tilde{u}^{-1}(u)) = q$ ($\because$ v は単射)

特に $\tilde{u}^{-1}(u) \in S = \varphi^{-1}(\{q\})$

従って $u \in \tilde{u}(S \cap \tilde{O})$.

これで $\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi \subset u(S \cap \tilde{O})$ が示された.

逆に $\forall u \in \tilde{\mathfrak{u}}(S \cap \tilde{O})$ をとる.

$$\pi(u) = \varphi_{\hat{u}_0}(u) = v\big(\varphi(\underbrace{\tilde{\mathfrak{u}}^{-1}(u)}_{\in S = \varphi^{-1}(\{q\})})\big)$$

$$= v(q) = 0.$$

従って $u \in \tilde{U} \cap \operatorname{Ker}\pi$.

これで $\mathfrak{u}(S \cap \tilde{O}) = \hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi$ も示された. ∎

$$\mathfrak{u} : \underset{\underset{S \cap \tilde{O}}{\shortparallel}}{O} \xrightarrow{\sim} \underset{\underset{\underset{\Phi(\tilde{\mathfrak{u}}(S \cap \hat{O}))}{\shortparallel}}{\Phi(\hat{U} \cap \operatorname{Ker}\pi)}}{\shortparallel}{U}, \quad x \mapsto \Phi(\tilde{\mathfrak{u}}(x)) \quad \text{とおく}.$$

$(O, U, \mathfrak{u}) \in LC(S; \mathbb{R}^k)$ (詳細略)

㊟ $(O, U, \mathfrak{u})$ は regular in (M_1, A_1).

次を示せばよい

㊟ $O = S \cap \tilde{O}$ かつ $\iota_{\mathfrak{u}\tilde{\mathfrak{u}}}(u) = \gamma(u)$ $(\forall u \in U)$

$O = S \cap \tilde{O}$ は O の def から従う.

$\forall u \in U$ をとる.

㊟ $\iota_{\mathfrak{u}\tilde{\mathfrak{u}}}(u) = \gamma(u)$.

$$\mathrm{Inv}\,\tilde{\mathfrak{u}}(u) = \tilde{\mathfrak{u}}(\mathfrak{u}^{-1}(u))$$

$$= \tilde{\mathfrak{u}}(\tilde{\mathfrak{u}}^{-1}(\Psi^{-1}(u))) \quad (\because\ \mathfrak{u}\ の\ \mathrm{def})$$

$$= \Psi^{-1}(u) = \gamma(u).$$

$\square$