幾何学 A 演習問題 No.1 問 1–問 14

対面発表は問 1, 問 4, 問 5, 問 13.

キーワード: $\mathbb{R}$ 代数

問 1. (重要: 対面発表) ベクトル空間 $\mathbb{R}^2$ を考える. 以下の写像 $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ のうち双線型であるものをすべて選べ. またそれらが双線型であること, それ以外が双線型でないことをそれぞれ示せ:

(1) $\nu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 y_1, x_2 y_2)$.

(2) $\mu : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (x_1 x_2, y_1 y_2)$.

(3) $\xi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto (y_2, x_1)$.

問 2. ベクトル空間 $\mathbb{R}$ は通常の “実数の積” について $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Example 2.1.3). 実数の積についての分配則などは認めてよい.

問 3. S を集合, W を実ベクトル空間とする. W 値関数のなす空間 $W^S := \{f : S \to W\}$ は “関数の和” と “関数のスカラー倍” の構造により実ベクトル空間となることを示せ (講義 Proposition 2.1.4).

問 4. (重要:対面発表) S を集合とする. 実ベクトル空間 $\mathbb{R}^S$ は “各点ごとの積” について $\mathbb{R}$ 代数となることを示せ (講義 Example 2.1.5).

問 5. (重要:対面発表) V, W を実ベクトル空間とする. このとき $\mathcal{L}(V, W) := \{f : V \to W \mid f \text{ は線型 }\}$ は W^V の線型部分空間であることを示せ (講義 Proposition 2.1.6).

Hint: $\mathcal{L}(V, W)$ がゼロ元を持つこと, 和とスカラー倍で閉じることをそれぞれ示せ.

問 6. V を実ベクトル空間とする. $\mathrm{End}(V) := \mathcal{L}(V, V)$ とおく. 実ベクトル空間 $\mathrm{End}(V)$ は写像の合成に関して $\mathbb{R}$ 代数となることを示せ. (講義 Example 2.1.7).

問 7.「部分 $\mathbb{R}$ 代数は $\mathbb{R}$ 代数である」を定式化し証明せよ (講義 Proposition 2.2.2).

問 8. 次の三つの写像が連続であることをそれぞれ示せ:

(1) $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x + y$.

(2) $\nu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto xy$.

(3) $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto -x$.

ただし $\mathbb{R}, \mathbb{R} \times \mathbb{R}\ (= \mathbb{R}^2)$ は標準位相によりそれぞれ位相空間とみなすものとする.

問 9. S を位相空間とする. $C(S) := \{f : S \to \mathbb{R} \mid f \text{ は連続 }\}$ は $\mathbb{R}^S$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Example 2.2.3; Hint 問 8).

問 10. $(V, \cdot)$ を $\mathbb{R}$ 代数とし, $\{W_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を V の部分 $\mathbb{R}$ 代数の族とする. このとき $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda$ は $(V, \cdot)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Proposition 2.2.4).

問 11. (重要度:低) S を位相空間とする. $C_c(S) := \{f \in C(S) \mid \mathrm{supp}\, f \text{ は compact}\}$ は $C(S)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であることを示せ (講義 Example 2.2.5).

問 12. S を集合, $p \in S$ とする. このとき

$$\mathrm{ev}_p : \mathbb{R}^S \to \mathbb{R},\ f \mapsto f(p)$$

は $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ (講義 Example 2.2.7).

裏へ続く

問 13. (重要:対面発表) S_1, S_2 をそれぞれ位相空間とし, $\varphi : S_1 \to S_2$ を連続写像とする. このとき φ による引き戻し

$$\varphi^* : C(S_2) \to C(S_1),\ f \mapsto f \circ \varphi$$

は $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ. (講義 Example 2.2.8).

Hint: φ^* が線型であることは認めてよい.

問 14. $(V, \cdot)$ を $\mathbb{R}$ 代数とする. V 上の二項演算 $[\ ,\ ]$ (bracket 積) を

$$[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$$

と定める. 以下を示せ (講義 Example 2.3.5).

(1) $(V, [\ ,\ ])$ は $\mathbb{R}$ 代数.

(2) V が結合的であるとする. このとき, 任意の $a, b, c \in V$ について以下 (Jacobi 律) が成り立つ:

$$[a, [b.c]] = [[a, b], c] + [b, [a, c]].$$