幾何学 A 演習問題 No.10 問 112–問 119

対面発表課題は問 112, 問 113, 問 118, 問 119.

キーワード: 多様体上の接空間

以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする.

問 112. (対面発表) $p \in M$ とする. 接空間 T_pM が $\mathcal{L}(C^\infty(M), \mathbb{R})$ の線型部分空間であることを示せ (講義 Proposition 13.1.2).

問 113. (対面発表) $p \in M$ とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定する.

(1) 各 $i = 1, \dots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \frac{\partial f_{\boldsymbol{u}}}{\partial u_i}(\boldsymbol{u}(p))$$

が well-defined であることを示せ.

(2) 各 $i = 1, \dots, n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_i}\right)_p \in T_pM$$

となることを示せ (講義 Proposition 13.2.2).

問 114. (試験範囲外) $p \in M$ とする. $\eta \in T_pM$ とし, $f_1, f_2 \in C^\infty(M)$ が p のまわりで等しい (つまり p の M における開近傍 Ω であって, $f_1|_\Omega = f_2|_\Omega$ となるものが存在する) とする. このとき $\eta(f_1) = \eta(f_2)$ となることを示せ (講義 Theorem 13.4.1).

問 115. (試験範囲外) $p \in M$ とし, Ω を M における p の開近傍とする.

(1)

$$r : C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega),\ f \mapsto f|_\Omega$$

が $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ (講義 Proposition 13.5.1).

(2) 各 $\eta \in T_p\Omega$ について,

$$\tilde{\eta} : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto \eta(f|_\Omega)$$

とする. このとき $\tilde{\eta} \in T_pM$ となることを示せ (講義 Proposition 13.5.3).

(3)

$$T_p\Omega \to T_pM,\ \eta \to \tilde{\eta}$$

が線型同型であることを示せ (講義 Theorem 13.5.4).

問 116. (試験範囲外) $p \in M$ とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を固定する. このとき $\{(\partial/\partial \boldsymbol{u}_i)_p\}_{i=1,\dots,n}$ が T_pM の基底であることを示せ (講義 Theorem 13.2.3).

問 117. (試験範囲外) $p \in M$ とする. また $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を固定する.

(1) 各 $i = 1, \dots, n$ について, $\widetilde{\boldsymbol{v}}_i \in C^\infty(M)$ であって,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}_k}\right)_p (\widetilde{\boldsymbol{v}}_i) = \begin{cases} 1 & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i \neq k \end{cases}$$

となるものが存在することを示せ (講義 Lemma 13.7.1).

(2) Jacobi 行列 $(J\tau_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ は T_pM の基底 $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_p\}_{i=1,\dots,n}$ から基底 $\{(\partial/\partial \boldsymbol{u}_j)_p\}_{j=1,\dots,n}$ への変換行列であることを示せ (講義 Theorem 13.3.1).

問 118. (対面発表) 2 次元 C^∞ 級多様体 $S^2 = (S^2, [\mathcal{A}_0])$ について考える (講義 Example 10.2.4 の意味). $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) \in S^2$ とし,

$$(O, U, \boldsymbol{u}) = (O_3^+, U_3^+, \boldsymbol{u}_3^+) \in \mathcal{A}_0$$
$$(O, U, \boldsymbol{v}) = (O_2^+, U_2^+, \boldsymbol{u}_2^+) \in \mathcal{A}_0$$

とする (講義 Example 13.3.2 の類題).

(1) Jacobi 行列 $(J\tau_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ を計算せよ.

(2)

$$\eta = 2\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_2}\right)_p \in T_pS^2$$

を $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_p\}_{i=1,2}$ の一次結合で表せ.

問 119. (対面発表) 2 次元 C^∞ 級多様体 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2 = (\mathbb{R}\mathrm{P}^2, [\mathcal{A}_0])$ について考える (講義 Theorem 12.2.2 の意味). $p = [1:1:1] \in \mathbb{R}\mathrm{P}^2$ とし,

$$(O, U, \boldsymbol{u}) = (O_3, U_3, \boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{A}_0,$$
$$(O, U, \boldsymbol{v}) = (O_2, U_2, \boldsymbol{u}_2) \in \mathcal{A}_0$$

とする.

(1) Jacobi 行列 $(J\tau_{\boldsymbol{uv}})_{\boldsymbol{u}(p)}$ を計算せよ.

(2)

$$\eta = 2\left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_1}\right)_p + \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}_2}\right)_p \in T_p(\mathbb{R}\mathrm{P}^2)$$

を $\{(\partial/\partial \boldsymbol{v}_i)_p\}_{i=1,2}$ の一次結合で表せ.