

幾何学 A 演習問題 No.11 問 120–問 134

対面発表課題は問 121, 問 122, 問 124, 問 125, 問 126, 問 129, 問 131, 問 132.

キーワード: C^∞ 級写像, 写像の微分

問 120. (試験範囲外) $i = 1, 2$ について, $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする.

- (1) $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ を C^∞ 級写像とする. また Ω を M_1 の開集合, Θ を M_2 の開集合であって, $\varphi(\Omega) \subset \Theta$ となるものとする. このとき

$$\varphi|_\Omega : \Omega \rightarrow \Theta, x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像であることを示せ. ただし Ω, Θ はそれぞれ M_1, M_2 の開部分多様体とみなすこととする (講義 Theorem 14.4.1).

- (2) $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}, \{\Theta_\kappa\}_{\kappa \in K}$ をそれぞれ M_1, M_2 の開被覆とする. 写像 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ (連続性は課さない) について, 以下の三条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 14.4.2):

条件 (i) $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (ii) 任意の $\lambda \in \Lambda, \kappa \in K$ について,

$$\varphi_{\lambda, \kappa} : \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa) \rightarrow \Theta_\kappa, x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像.

条件 (iii) 任意の $p \in M_1$ について, $\lambda \in \Lambda, \kappa \in K$ であって, $p \in \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa)$ かつ

$$\varphi_{\lambda, \kappa} : \Omega_\lambda \cap \varphi^{-1}(\Theta_\kappa) \rightarrow \Theta_\kappa, x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像となるものが存在する.

- (3) $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_1, (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}_2$ とする. 写像 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ (連続性は課さない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Lemma 14.4.3):

条件 (i)

$$\varphi_{OO'} : O \cap \varphi^{-1}(O') \rightarrow O', x \mapsto \varphi(x)$$

が C^∞ 級写像.

条件 (ii)

$$\varphi_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \rightarrow V, u \mapsto \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{u}^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Section 5).

- (4) 写像 $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ (連続性は課さない) について, 以下の三条件が同値であることを示せ (講義 Theorem 14.1.2):

条件 (i) $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (ii) 任意の $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_1, (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}_2$ について,

$$\varphi_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \rightarrow V, u \mapsto \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{u}^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Section 5).

条件 (iii) 任意の $p \in M_1$ について, $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_1, (O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}_2$ であって, $p \in O \cap \varphi^{-1}(O')$ かつ

$$\varphi_{\mathbf{u}\mathbf{v}} : \mathbf{u}(O \cap \varphi^{-1}(O')) \rightarrow V, u \mapsto \mathbf{v}(\varphi(\mathbf{u}^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Section 5) となるものが存在する.

問 121. (対面発表) \mathbb{R} を講義 Example 10.2.3 の意味で 1 次元 C^∞ 級多様体とみなす. また $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする. このとき, 写像 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

- (1) $f \in C^\infty(M; \mathbb{A})$.
- (2) f は M から \mathbb{R} への C^∞ 級写像 (in the sense of 講義 Definition 14.1.1).

問 122. (対面発表) $i = 1, 2$ について, M_i をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ を C^∞ 級写像とする.

- (1) 各 $\eta \in T_p M_1$ について, $\eta \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)} M_2$ であることを示せ (講義 Proposition 15.1.1).
- (2) φ の p における全微分

$$(d\varphi)_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2, \eta \mapsto \eta \circ \varphi^*$$

が線型写像であることを示せ (講義 Proposition 15.1.3).

問 123. (試験範囲外) $i = 1, 2$ について, $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ を C^∞ 級写像とする. $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}_1$ with $p \in O$ と, $(O', V, \mathbf{v}) \in \mathcal{A}_2$ with $\varphi(p) \in O'$ を固定する. このとき, 線型写像 $(d\varphi)_p : T_p M_1 \rightarrow T_p M_2$ に対して, Jacobi 行列 $(J\varphi_{\mathbf{u}\mathbf{v}})_{\mathbf{u}(p)}$ は座標基底 $\{(\partial/\partial \mathbf{u}_j)_p\}_{j=1, \dots, n_1}$ of $T_p M_1$, 座標基底 $\{(\partial/\partial \mathbf{v}_i)_{\varphi(p)}\}_{i=1, \dots, n_2}$ of $T_{\varphi(p)} M_2$ についての表現行列であることを示せ.

問 124. (対面発表) $i = 1, 2, 3$ について, $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$ をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \rightarrow M_2, \psi : M_2 \rightarrow M_3$ をそれぞれ C^∞ 級写像とする.

- (1) $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* : C(M_3) \rightarrow C(M_1)$ を示せ (講義 Lemma 14.2.2).
- (2) $\psi \circ \varphi : M_1 \rightarrow M_3$ が C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Theorem 14.2.1).
- (3) $p \in M_1$ とする.

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p : T_p M_1 \rightarrow T_{(\psi \circ \varphi)(p)} M_3$$

となることを示せ (講義 Theorem 15.3.1).

問 125. (対面発表) $M = (M, \mathcal{A})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とする.

- (1) このとき恒等写像

$$\text{id}_M : M \rightarrow M, x \mapsto x$$

は (M, \mathcal{A}) から (M, \mathcal{A}) への C^∞ 級写像になることを示せ (講義 Example 14.1.4).

- (2) $p \in M$ について, 恒等写像 id_M の p における全微分 $(d\text{id}_M)_p$ は $T_p M$ 上の恒等写像であることを示せ (講義 Example 15.1.4).

問 126. (対面発表) $i = 1, 2$ について, M_i をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする. また $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ を微分同相写像とする. このとき各 $p \in M_1$ について, $(d\varphi)_p : T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ は線型同型写像であることを示せ.

問 127. (試験範囲外) $i = 1, 2$ について, M_i をそれぞれ n_i 次元 C^∞ 級多様体とする.

(1) $p \in M_1$ とし, $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ を C^∞ 級写像とする. 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) φ が p のまわりで局所微分同相.

条件 (ii) $(d\varphi)_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ が線型同型.

(講義 Theorem 15.4.2)

(2) $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$ を全単射 C^∞ 級写像とする. 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) φ は微分同相.

条件 (ii) 任意の $p \in M_1$ において, $(d\varphi)_p: T_p M_1 \rightarrow T_{\varphi(p)} M_2$ が線型同型.

(講義 Corollary 15.4.4)

問 128. 連続写像

$$\varphi: S^2 \rightarrow S^2, x \mapsto (-x_1, x_2, x_3)$$

について考える.

(1) $\varphi: S^2 \rightarrow S^2$ が C^∞ 写像であることを示せ.

(2) $p \in (1, 0, 0) \in S^2$ とする. このとき $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ.

問 129. (対面発表) 連続写像

$$\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2, x \mapsto [x] = [x_1 : x_2 : x_3]$$

について考える.

(1) $\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ が C^∞ 写像であることを示せ (講義 Example 14.1.3).

(2) $p \in (1, 0, 0) \in S^2$ とする. このとき $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ (講義 Example 15.2.2).

問 130. 写像

$$\varphi: \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2, [x_1 : x_2] \mapsto [x_1 : x_2 : 0]$$

について考える.

(1) φ が well-defined であることを確認せよ. また φ が連続であることを示せ.

(2) $\varphi: \mathbb{RP}^1 \rightarrow \mathbb{RP}^2$ が C^∞ 写像であることを示せ.

(3) $p \in [1 : 0] \in \mathbb{RP}^1$ とする. このとき $(d\varphi)_p$ の階数を求めよ.

問 131. (対面発表) C^∞ 級写像

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sum_{i=1}^3 x_i^2$$

について考える. $\text{rank}(d\varphi)_p = 0$ となるような $p \in \mathbb{R}^3$ をすべて求めよ.

問 132. (対面発表) C^∞ 級写像

$$\varphi: S^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_3$$

について考える. $\text{rank}(d\varphi)_p = 0$ となるような $p \in S^2$ をすべて求めよ.

問 133. (試験範囲外)

$$\varphi: S^1 \rightarrow \mathbb{RP}^1, (\cos \theta, \sin \theta) \mapsto [\cos(\theta/2) : \sin(\theta/2)]$$

が well-defined であることを示せ. また φ は微分同相であることを示せ (注: $n \geq 2$ のときは S^n と \mathbb{RP}^n の間に同相写像はありません).

問 134. (試験範囲外) $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$ とし, 講義 Example 10.2.4 の 1 次元 C^∞ 級多様体 $(M, [\mathcal{A}_0]), (M, [\mathcal{B}_0])$ を考える. ただし

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0 &:= \{(M, \mathbb{R}, \mathbf{u} : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1)\}, \\ \mathcal{B}_0 &:= \{(M, \mathbb{R}, \mathbf{v} : M \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_2)\}\end{aligned}$$

としている.

- (1) 恒等写像 $\text{id}_M : M \rightarrow M$ について, id_M は $(M, [\mathcal{A}_0])$ から $(M, [\mathcal{B}_0])$ への C^∞ 級写像であることを示せ.
- (2) 恒等写像 $\text{id}_M : M \rightarrow M$ について, id_M は $(M, [\mathcal{B}_0])$ から $(M, [\mathcal{A}_0])$ への C^∞ 級写像ではないことを示せ.
- (3)

$$\varphi : M \rightarrow M, (x_1, x_2) \mapsto (x_1^{1/3}, x_1)$$

は well-defined であることを示せ. また φ が微分同相写像であることを示せ.