幾何学 A 演習問題 No.12 問 135–問 139

対面発表課題は問 135, 問 136, 問 138.

キーワード: 正則部分多様体以下, ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は 講義 Example 10.2.3 の意味で n 次元 C^∞ 級多様体とみなす.

問 135. (対面発表) 「開部分多様体は正則部分多様体である」を定式化し, 証明せよ (講義 Example 16.1.2).

問 136. (対面発表) $(S^n, [\mathcal{A}_0])$ (講義 Example 10.2.3) は $\mathbb{R}^{n+1}$ の正則部分多様体であることを示せ (講義 Example 16.1.3).

問 137. $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$ とし, 講義 Example 10.2.4 の 1 次元 $C^i nfty$ 級多様体 $(M, [\mathcal{A}_0])$, $(M, [\mathcal{B}_0])$ を考える. ただし

$$\mathcal{A}_0 := \{(M, \mathbb{R}, \boldsymbol{u} : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x_1)\},$$
$$\mathcal{B}_0 := \{(M, \mathbb{R}, \boldsymbol{v} : M \to \mathbb{R}, x \mapsto x_2)\}$$

としている.

(1) $(M, [\mathcal{A}_0])$ は $\mathbb{R}^2$ の 1 次元正則部分多様体であることを示せ.

(2) $(M, [\mathcal{B}_0])$ は $\mathbb{R}^2$ の 1 次元正則部分多様体でないことを示せ.

問 138. (対面発表) C^∞ 級写像

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sum_{i=1}^{3} x_i^2$$

について考える (講義 Example 16.2.3 の一般化).

(1) φ の正則値をすべて求めよ.

(2) 各 $r \in \mathbb{R}_{>0}$ について $S^2(r) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = r^2\}$ が $\mathbb{R}^3$ の正則部分多様体であることを示せ.

(3) 各 $r \in \mathbb{R}_{>0}$, $p \in S^2(r)$ について,

$$T_p S^2(r) = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mid p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \right\}$$

となることを示せ.

問 139. (試験範囲外) C^∞ 級写像

$$\varphi : S^2 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_3$$

について考える (講義 Example 16.2.4 の一般化).

(1) φ の正則値をすべて求めよ.

(2) 各 $h \in (-1, 1)$ について $S_h := \{x \in S^2 \mid x_3 = h\}$ が S^2 の正則部分多様体であることを示せ.

(3) 各 $h \in (-1, 1)$, $p \in S_h$ について,

$$T_p S_h = \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mid p \perp \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, a_3 = 0 \right\}$$

となることを示せ.