幾何学 A 演習問題 No.4 問 36–問 50

対面発表は問 39, 問 40, 問 41, 問 42, 問 45, 問 47, 問 48, 問 49.

キーワード: C^∞ 級写像, 全微分

以下 $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1. U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$ の空でない開集合とする. また $\{\boldsymbol{x}_j\}_{j=1,\ldots,n_1}$, $\{\boldsymbol{y}_i\}_{i=1,\ldots,n_2}$ をそれぞれ U_1, U_2 上の座標関数の組とする.

問 36. $\varphi : U_1 \to U_2$ が C^∞ 級写像であるとする. このとき

$$\varphi^* : C^\infty(U_2) \to C^\infty(U_1)$$

は $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ (講義 Proposition 5.1.2).

問 37. (位相空間論の復習) X を位相空間とし, $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を位相空間の族とする. また $\prod_{\lambda\imath\Lambda} Y_\lambda$ を $\{Y_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ の直積集合に積位相を定めたものとする. 写像

$$\varphi : X \to \prod_{\lambda\imath\Lambda} Y_\lambda,\ x \mapsto (\varphi_\lambda(x))_{\lambda\in\Lambda}$$

について, 以下を示せ (講義 Proposition 5.1.6; 演習発表は (1) のみでも構わないこととする).

(1) Λ が有限集合であるとする. このとき, φ についての以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i): $\varphi : X \to \prod_{\lambda\imath\Lambda} Y_\lambda$ は連続.

条件 (ii): 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $\varphi_\lambda : X \to Y_\lambda$ は連続.

(2) (重要度:低) Λ が有限とは限らない場合に, 「積位相」の定義を述べよ. また上と同様のことが成り立つことを示せ.

問 38. (解析の復習; 連鎖律) 写像

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n_2}(x))$$

について, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2} \in C^1(U_1)$ とする. このとき任意の $f \in C^1(U_2)$ について, $\varphi^*(f) \in C^1(U_1)$ であり, 各 $j = 1, 2, \ldots, n_1$ について

$$\frac{\partial(\varphi^*(f))}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n_2} \left(\varphi^*\left(\frac{\partial f}{\partial y_i}\right)\right) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \quad \text{on } U_1$$

が成り立つことを示せ (講義 Proposition 5.1.7).

問 39. (対面発表) 写像

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ x \mapsto (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n_2}(x))$$

について, 以下の二条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 5.1.3):

条件 (i): φ は講義 Definition 5.1.1 の意味で C^∞ 級 (i.e. φ は連続であり, $\varphi^*(C^\infty(U_2)) \subset C^\infty(U_1)$).

条件 (ii): $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_2} \in C^\infty(U_1)$.

問 40. (対面発表) $n_1 = n_2 = 2$ とし,

$$U_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1, x_1 > 0\}$$
$$U_2 = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid y_1^2 + y_2^2 < 1, y_2 > 0\}$$

とおく.

(1) U_1, U_2 がそれぞれ $\mathbb{R}^2$ の開集合であることを示せ.

(2) 写像

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ (x_1, x_2) \mapsto \left(x_2, \sqrt{1-(x_1^2+x_2^2)}\right)$$

が C^∞ 級であることを示せ (講義 Example 5.1.4).

問 41. (対面発表) $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像とし, $p \in U_1$ とする. 各 $\eta \in T_pU_1$ について, $\eta \circ \varphi^* \in T_{\varphi(p)}U_2$ となることを示せ (講義 Proposition 5.2.1).

問 42. (対面発表) $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像とし, $p \in U_1$ とする. φ の p における全微分

$$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2,\ \eta \mapsto \eta \circ \varphi^*$$

は線型写像であることを示せ (講義 Proposition 5.2.3).

問 43. $q \in U_2$ とする. 任意の $\eta \in T_qU_2$ について,

$$\eta = \sum_{i=1}^{n_2} \eta(\boldsymbol{y}_i) \left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_q$$

となることを講義 Corollary 4.3.6 を用いて示せ (講義 Lemma 5.3.4).

問 44. (線型代数の復習) V, W をそれぞれ n_1 次元, n_2 次元実ベクトル空間とし, $\{v_1, \ldots, v_{n_1}\}, \{w_1, \ldots, w_{n_2}\}$ をそれぞれ V, W の基底とする. また $\phi : V \to W$ を線型写像, A を $n_2 \times n_1$ 実行列とする. このとき以下が同値であることを示せ:

条件 (i): A は ϕ の表現行列 with respect to $\{v_1, \ldots, v_{n_1}\}$ and $\{w_1, \ldots, w_{n_2}\}$ i.e.[*1] 任意の

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_1}$$

について,

$$\phi(\sum_{j=1}^{n_1} a_j v_j) = \sum_{i=1}^{n_2} b_i w_i \quad \text{for} \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n_2}$$

とおくと,

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_{n_1} \end{pmatrix}.$$

条件 (ii): $\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{n_2} A_{ij} w_i$ for any $j = 1, \ldots, n_1$.

問 45. (対面発表) $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像, $p \in U_1$ とする. このとき Jacobi 行列

$$(J\varphi)_p := \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(p)\right)_{i=1,\ldots,n_2, j=1,\ldots,n_1}$$

は

$$(d\varphi)_p : T_pU_1 \to T_{\varphi(p)}U_2$$

の表現行列 with respect to $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right\}_{j=1,\ldots,n_1}$ and $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)_{\varphi(p)}\right\}_{i=1,\ldots,n_2}$ であることを示せ (講義 Proposition 5.3.2).

[*1] 表現行列の定義には異なる流儀がいろいろあるので注意

問 46. 以下の C^∞ 級写像 $\varphi : U_1 \to U_2$, 点 $p \in U_1$ について, それぞれ Jacobi 行列 $(J\varphi)_p$ を計算せよ:

(1) $n_1 = 2$, $n_2 = 3$, $U_1 = \mathbb{R}^2$, $U_2 = \mathbb{R}^3$,

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x_1, x_2) \mapsto (\cos x_1, \sin x_2, x_1 + x_2),$$

$p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ (講義 Example 5.3.3).

(2) $n_1 = 1$, $n_2 = 2$, $U_1 = \mathbb{R}$, $U_2 = \mathbb{R}^2$,

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x \mapsto (x^2, 2x),$$

$p \in \mathbb{R}$.

(3) $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $U_1 = \mathbb{R}^3$, $U_2 = \mathbb{R}^2$,

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_1 + x_2 + x_3),$$

$p = (p_1, p_2, p_3) \in \mathbb{R}^3$.

(4) $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $U_1 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $U_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

$$\varphi : U_1 \to U_2,\ (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right),$$

$p = (p_1, p_2) \in U_1$.

設定: 以下 $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1. U_2, U_3 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}$, $\mathbb{R}^{n_2}$, $\mathbb{R}^{n_3}$ の空でない開集合とする. また $\varphi : U_1 \to U_2$, $\psi : U_2 \to U_3$ をそれぞれ C^∞ 級写像とする.

問 47. (対面発表)

$$(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^* \quad \text{as } C(U_3) \to C(U_1)$$

となることを示せ (講義 Lemma 5.4.2).

問 48. (対面発表)

$$\psi \circ \varphi : U_1 \to U_3$$

は C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Theorem 5.4.1).

問 49. (対面発表) $p \in U_1$ を固定する. このとき

$$(d(\psi \circ \varphi))_p = (d\psi)_{\varphi(p)} \circ (d\varphi)_p$$

が成り立つことを示せ (講義 Theorem 5.4.3).

問 50. 次の等式が「連鎖律」と関連があることを説明せよ:

$$(J(\psi \circ \varphi))_p = (J\psi)_{\varphi(p)} \cdot (J\varphi)_p$$

(講義 Corollary 5.4.4).