幾何学 A 演習問題 No.5 問 51–問 69

対面発表課題は問 58, 問 59, 問 60, 問 61, 問 62, 問 67, 問 68, 問 69.

キーワード: 局所座標系, 座標変換, C^∞-atlas

設定 (問 51 から問 55 まで): 以下, $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする.

問 51. (位相空間論の復習) A を X の部分集合とし, 包含写像を $\iota : A \hookrightarrow X$ とおく. このとき $\mathcal{O}_X(A)$ は "ι を連続とするような最弱な位相" であることを示せ (講義 Proposition 6.1.2).

問 52. (位相空間論の復習) $B \subset A \subset X$ とする. このとき

$$\mathcal{O}_X(B) = (\mathcal{O}_X(A))(B)$$

となることを示せ (講義 Proposition 6.1.3).

問 53. (位相空間論の復習) $U \in \mathcal{O}_X$ (i.e. U は X の開集合) とする. U の部分集合 V について, 以下の条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 6.1.4):

条件 (i): $V \in \mathcal{O}_X(U)$ (i.e. V は U の開集合).

条件 (ii): $V \in \mathcal{O}_X$ (i.e. V は X の開集合).

問 54. (位相空間論の復習) $\phi : X \to Y$ を全単射連続写像とする. このとき以下の条件が同値であることを示せ (講義 Proposition 6.1.5):

条件 (i): $\phi : X \to Y$ は同相写像 (i.e. 逆写像 $\phi^{-1} : Y \to X$ も連続).

条件 (ii): $\phi : X \to Y$ は開写像 (i.e. 任意の $U \in \mathcal{O}_X$ について, $\phi(U) \in \mathcal{O}_Y$).

問 55. (位相空間論の復習) $A \subset X$, $B \subset Y$ とする. 相対位相 $\mathcal{O}_X(A)$, $\mathcal{O}_Y(B)$ により A, B をそれぞれ位相空間とみなす. 次を示せ (講義 Proposition 6.1.6):

(1) $\phi : X \to Y$ を連続写像であって, $\phi(A) \subset B$ となるものとする. このとき ϕ は A から B への写像としても連続.

(2) $\phi : X \to Y$ を同相写像であって, $\phi(A) = B$ となるものとする. このとき ϕ は A から B への写像としても同相.

問 56. M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする. O_0 を O の開集合とする. このとき $(O_0, \boldsymbol{u}(O_0), \boldsymbol{u}|_{O_0} : O_0 \to \boldsymbol{u}(O_0)) \in \mathcal{LC}(M : \mathbb{R}^n)$ となることを示せ (講義 Proposition 6.2.4).

設定 (問 57 から問 61 まで): 以下, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし,

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

とおく. S^n を $\mathbb{R}^{n+1}$ の標準位相の定める相対位相により位相空間とみなす. また

- $O = \{x \in S^n \mid x_{n+1} > 0\} \subset S^n$,
- $U = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$,
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \dots, x_n)$

とおく.

問 57. (位相空間論の復習) S^n は連結コンパクトハウスドルフ位相空間であることを示せ.

問 58. (対面発表) 上記 $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ が well-defined であることを示せ.

問 59. (対面発表) O が S^n の開集合であることを示せ. また U が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ (講義 Example 6.2.3).

問 60. (対面発表) 写像 $\boldsymbol{u} : O \to U$ の逆写像を構成せよ (講義 Example 6.2.3).

問 61. (対面発表) $\boldsymbol{u} : O \to U$ が同相写像であることを示せ (講義 Example 6.2.3).

設定 (問 62 から問 66 まで): 以下, M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また $\mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を M の n 次元局所座標系全体の集合とし, $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ とする.

問 62. (対面発表) 座標変換を説明する図を描け.

問 63. $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O, U, \boldsymbol{u})$ (自分自身) への座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{uu}} : \boldsymbol{u}(O) \to \boldsymbol{u}(O)$$

は恒等写像であることを示せ (講義 Proposition 7.1.3).

問 64. $(O, U, \boldsymbol{u})$ から $(O', V, \boldsymbol{v})$ への座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{uv}} : \boldsymbol{u}(O \cap O') \to \boldsymbol{v}(O \cap O')$$

と $(O', V, \boldsymbol{v})$ から $(O, U, \boldsymbol{u})$ への座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{vu}} : \boldsymbol{v}(O \cap O') \to \boldsymbol{u}(O \cap O')$$

は互いに逆写像であることを示せ (講義 Proposition 7.1.4).

問 65. $(O_1, U_1, \boldsymbol{u}_1), (O_2, U_2, \boldsymbol{u}_2), (O_3, U_3, \boldsymbol{u}_3) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ を固定する. このとき $\boldsymbol{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ から $\boldsymbol{u}_3(O_1 \cap O_2 \cap O_3)$ への写像として

$$\tau_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_3}|_{\boldsymbol{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)} = (\tau_{\boldsymbol{u}_2\boldsymbol{u}_3}|_{\boldsymbol{u}_2(O_1 \cap O_2 \cap O_3)}) \circ (\tau_{\boldsymbol{u}_1\boldsymbol{u}_2}|_{\boldsymbol{u}_1(O_1 \cap O_2 \cap O_3)})$$

となることを示せ (講義 Proposition 7.1.5).

問 66. $M = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = x_1^3\} \subset \mathbb{R}^2$ とする. $(O, U, \boldsymbol{u}), (O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{LC}(M; \mathbb{R})$ を

- $O = O' = M$.
- $U = V = \mathbb{R}$.
- $\boldsymbol{u} : O \to U,\ x \mapsto x_1$.
- $\boldsymbol{v} : O \to V,\ x \mapsto x_2$.

このとき座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}$, $\tau_{\boldsymbol{vu}}$ をそれぞれ求めよ. また $\tau_{\boldsymbol{uv}}$, $\tau_{\boldsymbol{vu}}$ が C^∞ 級写像であるか否か論じよ (講義 Example 7.2.1).

設定 (問 67 から問 69 まで): 以下, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とおく. また各 $k = 1, \ldots, n+1$ について, $(O_k^\pm, U_k^\pm, \boldsymbol{u}_k^\pm) \in \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ を以下のように定める:

- $O_k^+ = \{x \in S^n \mid x_k > 0\}, O_k^- = \{x \in S^n \mid x_k < 0\} \subset S^2$.
- $U_k^\pm = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\boldsymbol{u}_k^\pm : O_k^\pm \to U_k^\pm,\ x \mapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$.

また $\mathcal{A}_0 = \{(O_k^+, U_k^+, \boldsymbol{u}_k^+) \mid k = 1, \ldots, n+1\} \cup \{(O_k^-, U_k^-, \boldsymbol{u}_k^-) \mid k = 1, \ldots, n+1\} \subset \mathcal{LC}(S^n; \mathbb{R}^n)$ とおく.

問 67. (対面発表) 各 $k = 1, \ldots, n+1$ について, $\boldsymbol{u}_k^+$, $\boldsymbol{u}_k^-$ の逆写像をそれぞれ求めよ.

問 68. (対面発表) $1 \leq k_1 < k_2 \leq n+1$ とする. $\boldsymbol{u}_{k_1}^+(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$, $\boldsymbol{u}_{k_2}^-(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$ をそれぞれ求めよ. また座標変換

$$\tau_{\boldsymbol{u}_{k_1}^+\boldsymbol{u}_{k_2}^-} : \boldsymbol{u}_{k_1}^+(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-) \to \boldsymbol{u}_{k_2}^-(O_{k_1}^+ \cap O_{k_2}^-)$$

を求め, C^∞ 級写像であることを示せ (講義 Example 7.1.2, Example 7.3.2 の類題).

問 69. (対面発表) $\mathcal{A}_0$ が S^n の C^∞-atlas であることを示せ (Example 7.3.2).