幾何学 A 演習問題 No.6 問 70–問 80

対面発表課題は問 70, 問 72, 問 74, 問 76, 問 77, 問 78, 問 79.

キーワード: C^∞ 級関数 on C^∞-atlas

問 70. (対面発表) (Section 2 の補足) V_1, V_2 を $\mathbb{R}$ 代数とし, W を V_2 の部分 $\mathbb{R}$ 代数とする. また $\psi : V_1 \to V_2$ を $\mathbb{R}$ 代数準同型とする. このとき $\psi^{-1}(W)$ は V_1 の部分 $\mathbb{R}$ 代数となることを示せ (講義 Proposition 8.3.3).

問 71. (位相空間論の復習) X, Y を位相空間とし, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開被覆とする. このとき写像 $\varphi : X \to Y$ について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (1): $\varphi : X \to Y$ は連続.

条件 (2): 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $\varphi|_{U_\lambda} : U_\lambda \to Y$ は連続.

問 72. (対面発表) (解析の復習: 講義 Theorem 8.2.4) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とする. また $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U の開被覆とする. このとき関数 $f : U \to \mathbb{R}$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (1): $f \in C^\infty(U)$.

条件 (2): 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $f|_{U_\lambda} \in C^\infty(U_\lambda)$.

問 73. (解析の復習) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. また $\{U_1^\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を U_1 の開被覆とする. このとき写像 $\varphi : U_1 \to U_2$ (連続性は仮定しない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (1): $\varphi : U_1 \to U_2$ は C^∞ 級写像.

条件 (2): 各 $\lambda \in \Lambda$ について, $\varphi|_{U_1^\lambda} : U_1^\lambda \to U_2$ は C^∞ 級写像.

問 74. (対面発表) (Section 5 の補足) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U_1, U_2 をそれぞれ $\mathbb{R}^{n_1}, \mathbb{R}^{n_2}$ の開集合とする. また $\varphi : U_1 \to U_2$ を C^∞ 級写像とし, V を U_2 の開集合とする. このとき $\varphi^{-1}(V)$ は U_1 の開集合であり,

$$\varphi|_{\varphi^{-1}(V)} : \varphi^{-1}(V) \to V,\ u \mapsto \varphi(u)$$

が C^∞ 級写像となることを示せ (Hint: Proposition 5.1.3 などを使う).

問 75. (上記問題についての注意; 優先度低) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, U を $\mathbb{R}^n$ の開集合, V を U の開集合とする. また

$$r : C^\infty(U) \to C^\infty(V),\ f \mapsto f|_V$$

とする.

(1) r が well-defined であることを示せ. また r が $\mathbb{R}$ 代数準同型であることを示せ.

(2) r は単射になるとは限らない. 単射にならないような例を構成せよ.

(3) r は全射になるとは限らない. 全射にならないような例を構成せよ.

設定 (問 76 から問 78 まで): M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}_0$ を M の n 次元 C^∞-atlas とする.

問 76. (対面発表) 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (1) f は $\mathcal{A}_0$ 上 C^∞ 級 (i.e. $f \in C(M)$ かつ $f_{\boldsymbol{u}} \in C^\infty(U)$ for any $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$).

条件 (2) 任意の $p \in M$ について, $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$ であって, $p \in O$ かつ $f_{\boldsymbol{u}} \in C^\infty(U)$ となるものが存在する.

(講義 Theorem 8.2.3).

問 77. (対面発表) 各 $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$ について,

$$\psi_{\boldsymbol{u}} : C(M) \to C(U), f \mapsto f_{\boldsymbol{u}}$$

が $\mathbb{R}$ 代数準同型となることを示せ (講義 Lemma 8.3.4).

問 78. (対面発表) $C^\infty(M;\mathcal{A}_0)$ は $C(M)$ の部分 $\mathbb{R}$ 代数であり, 特にそれ自身が $\mathbb{R}$ 代数となることを示せ (講義 Theorem 8.3.2).

設定 (問 79 から問 80 まで): 以下, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とおく. また各 $k = 1, \ldots, n+1$ について, $(O_k^\pm, U_k^\pm, \boldsymbol{u}_k^\pm) \in \mathcal{LC}(S^n;\mathbb{R}^n)$ を以下のように定める:

- $O_k^+ = \{x \in S^n \mid x_k > 0\}, O_k^- = \{x \in S^n \mid x_k < 0\} \subset S^2$.
- $U_k^\pm = \{u \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n u_i^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$.
- $\boldsymbol{u}_k^\pm : O_k^\pm \to U_k^\pm,\ x \mapsto (x_1, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}, \ldots, x_{n+1})$.

また $\mathcal{A}_0 = \{(O_k^+, U_k^+, \boldsymbol{u}_k^+) \mid k = 1, \ldots, n+1\} \cup \{(O_k^-, U_k^-, \boldsymbol{u}_k^-) \mid k = 1, \ldots, n+1\} \subset \mathcal{LC}(S^n;\mathbb{R}^n)$ とおく. このとき $\mathcal{A}_0$ は S^n の n 次元 C^∞-atlas である (問 69).

問 79. (対面発表) 上記設定で $n = 1$ の場合を考える. $f \in C(S^1)$ として

$$f : S^1 \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_2$$

を考える. このとき $f_{\boldsymbol{u}_k^+}$, $f_{\boldsymbol{u}_k^-}$ $(k = 1, 2)$ をそれぞれ求めよ (定義域も $\mathbb{R}$ の開集合として明示的に求めること). また $f \in C^\infty(S^1;\mathcal{A}_0)$ となることを示せ (講義 Example 8.2.2).

問 80. 一般の $n \geq 1$ について考える. $f \in C(S^n)$ として

$$f : S^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x_{n+1}$$

を考える. このとき $f_{\boldsymbol{u}_k^+}$, $f_{\boldsymbol{u}_k^-}$ $(k = 1, \ldots, n+1)$ をそれぞれ求めよ (定義域も $\mathbb{R}^n$ の開集合として明示的に求めること). また $f \in C^\infty(S^n;\mathcal{A}_0)$ となることを示せ (講義 Example 8.2.2 の一般化).