幾何学 A 演習問題 No.8 問 87–問 95

対面発表課題は問 87, 問 90, 問 91, 問 93.

キーワード: C^∞ 級多様体

問 87. (対面発表) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $\mathcal{A}_0, \mathcal{B}_0 \in C^\infty$-atlas$(M;\mathbb{R}^n)$ について以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) $[\mathcal{A}_0] = [\mathcal{B}_0]$.

条件 (ii) 任意の $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}_0$, $(O', V, \boldsymbol{v}) \in \mathcal{B}_0$ について, 座標変換 $\tau_{\boldsymbol{uv}}, \tau_{\boldsymbol{vu}}$ は共に C^∞ 級写像.

(講義 Proposition 9.1.8; No.7 で出題するのを忘れてました).

問 88. (位相空間論の復習) ハウスドルフ位相空間のコンパクト部分集合は閉集合であることを示せ.

問 89. (位相空間論の復習) ハウスドルフ位相空間の部分空間 (部分集合に相対位相を入れたもの) はハウスドルフ位相空間であることを示せ.

問 90. (対面発表) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}$ を極大 n 次元 C^∞-atlas on M とする. $(O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}$, M の開集合 Ω について

$$(O \cap \Omega, \boldsymbol{u}(O \cap \Omega), \boldsymbol{u}|_{O\cap\Omega} : O \cap \Omega \to \boldsymbol{u}(O \cap \Omega)) \in \mathcal{A}$$

となることを示せ (講義 Lemma 10.5.1).

問 91. (対面発表) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $\mathcal{A}$ を極大 n 次元 C^∞-atlas on M とする. また Ω を M の開集合とする. このとき,

$$\mathcal{A}_\Omega := \{(O \cap \Omega, \boldsymbol{u}(O \cap U), \boldsymbol{u}|_{O\cap\Omega} : O \cap \Omega \to \boldsymbol{u}(O \cap \Omega)) \mid (O, U, \boldsymbol{u}) \in \mathcal{A}\}$$

とおくと, $\mathcal{A}_\Omega$ は Ω の n 次元極大 C^∞-atlas であることを示せ. また $(M, \mathcal{A})$ が n 次元 C^∞ 級多様体であるとき, $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は n 次元 C^∞ 級多様体であることを示せ (講義 Theorem 10.3.1).

問 92. (対面発表) M を位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\mathcal{A}$ を極大 n 次元 C^∞-atlas on M とし, $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の開被覆とする. 関数 $f : M \to \mathbb{R}$ (連続性は課さない) について, 以下の二条件が同値であることを示せ:

条件 (i) $f \in C^\infty(M; \mathcal{A})$.

条件 (ii) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について, $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda, \mathcal{A}_{\Omega_\lambda})$.

(講義 Theorem 10.3.3 の一般化).

問 93. (対面発表) 連結かつコンパクトな 2 次元 C^∞ 級多様体の例を一つ挙げよ. また連結かつ非コンパクトな 2 次元 C^∞ 級多様体の例を一つ挙げよ.

問 94. (試験には出さない) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし, $M := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1x_2 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ とおく. このとき M の局所座標系 $(O, U, \boldsymbol{u})$ であって, $(0, 0) \in O$ となるものが存在しないことを示せ. C^∞-atlas$(M;\mathbb{R}^n) = \emptyset$ を示せ.

問 95. (試験には出さない) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. n 次元 C^∞ 級多様体 $(M, \mathcal{A})$ について考える:

(1) $\{O\}_{(O,U,\boldsymbol{u})\in\mathcal{A}}$ は位相空間 M の開基であることを示せ.

(2) M は局所コンパクトであることを示せ.

(3) M が連結であることと M が弧状連結であることは同値であることを示せ.