

1 滑らかな 1 の分割の存在定理

このノートを通じて, $M = (M, \mathcal{A})$ を k -dimensional C^∞ -manifold とする.
以下の定理を示すのがこのノートの目的である.

Theorem 1.1. \mathcal{U} を M の開被覆とする. このとき弱い意味で \mathcal{U} に従う 1 の分割 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ であって, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $\psi_\lambda \in C^\infty(M)$ となるようなものが存在する.

ただし “弱い意味で開被覆 \mathcal{U} に従う 1 の分割” というのは以下の意味とする:

Definition 1.2. X を位相空間, \mathcal{U} を X の開被覆とする. X 上の連続関数の族 $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が, 弱い意味で開被覆に従う 1 の分割であるとは, 以下の四条件を満たすこととする:

Condition (1): $\psi_\lambda(x) \in [0, 1] \subset \mathbb{R}$ for any $x \in X$.

Condition (2): For each $\lambda \in \Lambda$, there exists $U \in \mathcal{U}$ such that $\text{supp } \psi_\lambda \subset U$.

Condition (3): $\{\text{supp } \psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ is locally finite. That is, for each $x \in X$, there exists an open neighborhood U_x such that

$$\Lambda(U_x) := \{\lambda \in \Lambda \mid (\text{supp } \psi_\lambda) \cap U_x \neq \emptyset\}$$

is finite.

Condition (4): For each $x \in X$,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(x) = 1.$$

Note that by Condition (3), the left hand side is a finite sum.

1.1 Cut-off 関数

この節では \mathbb{R}^k 上の cut-off 関数に関連する二つの命題を準備しておく.

以下, ユークリッド空間 \mathbb{R}^k の標準的な内積から定まるノルムを $\|\cdot\|$ という記号で表す.

Proposition 1.3. 点 $c \in \mathbb{R}^k$ と正の実数たち $0 \leq r_1 < r_2$ を固定する. このとき, $b_{r_1, r_2}^c \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ であって, 以下の三条件を満たすものが存在する:

1. $b_{r_1, r_2}^c(x) = 1$ if $\|x - c\| \leq r_1$.
2. $b_{r_1, r_2}^c(x) > 0$ if $r_1 < \|x - c\| < r_2$.
3. $b_{r_1, r_2}^c(x) = 0$ if $r_2 \leq \|x - c\|$.

Proposition 1.4. $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$, $b \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ とし, b の台 $\text{supp } b \subset \mathbb{R}^k$ はコンパクトで, また

$$\text{supp } b \subset U$$

を満たすとする. ここで,

$$f : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \begin{cases} b(\mathbf{u}(p)) & \text{if } \mathbf{u}(p) \in U, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

とおく. このとき, $f \in C^\infty(M)$ で, 更に

$$\text{supp } f = \mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b) \subset M.$$

後で見るように, Proposition 1.4 の証明の中で M が Hausdorff であるという条件が本質的に用いられていることに注意しておく.

以下, 命題の証明を述べておく. まず以下の Lemma を用いて Proposition 1.3 の証明を述べる.

Lemma 1.5. 正の実数たち $0 < r_1 < r_2$ を固定する. $\mathbb{R}_{>0}$ 上の関数

$$q : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 1 & (\text{if } t \leq r_1) \\ \frac{\exp(-\frac{1}{r_2-t})}{\exp(-\frac{1}{t-r_1}) + \exp(-\frac{1}{r_2-t})} & (\text{if } r_1 < t < r_2) \\ 0 & (\text{if } r_2 \leq t) \end{cases}$$

は C^∞ -級.

Proof of Lemma 1.5. まず

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad s \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{s}) & \text{if } 0 < s \\ 0 & \text{if } s \leq 0 \end{cases}$$

が \mathbb{R} 上 C^∞ -であることに注意する. ここで各 $t \in \mathbb{R}_{>0}$ について

$$q(t) = \frac{f(r_2 - t)}{f(t - r_1) + f(r_2 - t)}$$

となることから, q が C^∞ -級であることが分かる. □

Proof of Proposition 1.3. Lemma 1.5 の C^∞ -級関数 $q : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$ を考える。ユークリッド空間 \mathbb{R}^k 上の C^∞ -級関数 \tilde{b} を

$$\tilde{b} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto q(\|x - c\|)$$

とおく。ここで $b_{r_1, r_2}^c := \tilde{b}|_{\mathbb{R}^k}$ とおけば、これが我々の求めるものである。□

次に Proposition 1.4 の証明を述べる。

Proof of Proposition 1.4. まず後半の主張を示そう。 $\text{supp } b$ がコンパクトであることと、 $\mathbf{u}^{-1} : U \rightarrow O$ の連続性から、 $\mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b)$ はコンパクトである。また、 M が Hausdorff であることから、 $\mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b)$ は M 内の閉集合である。 f の定義から、

$$\{p \in M \mid f(p) \neq 0\} \subset \mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b)$$

となるので、閉包の性質から $\text{supp } f \subset \mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b)$ である。特に $\text{supp } f$ は $\mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b)$ の閉集合となることから、コンパクトであり、これより $\mathbf{u}(\text{supp } f)$ もコンパクト、さらに \mathbb{R}^k の閉集合である (\mathbb{R}^k は Hausdorff なので)。これまでの議論から

$$\{a \in U \mid b(a) \neq 0\} \subset \mathbf{u}(\text{supp } f) \subset \text{supp } b = \overline{\{a \in U \mid b(a) \neq 0\}}$$

が分かる。閉包の性質から $\mathbf{u}(\text{supp } f) = \text{supp } b$ となる。これで $\text{supp } f = \mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b)$ が示された。次に前半の主張を示そう。 $p \in M$ を任意にとる。 f が p のまわりで C^∞ 級であることを示せばよい。 $p \in O$ のときは、 $f|_O \equiv b \circ \mathbf{u}$ となるので p のまわりで C^∞ 級。 $p \notin O$ の場合を考える。まず前半の主張から $\text{supp } f = \mathbf{u}^{-1}(\text{supp } b) \subset O$ となるので、 $p \notin \text{supp } f$ である。また、 $\text{supp } f$ は閉集合であることから、 p の開近傍 V_p であって、 $V_p \cap \text{supp } f = \emptyset$ となるものが得られる。特に V_p 上で f はゼロ関数となるため、 p のまわりで C^∞ 級である。これで f が C^∞ 級であることが示された。□

1.2 準備

この節では、Theorem 1.1 の証明の準備として以下の命題を示す。

Proposition 1.6. 多様体 M の *locally finite* な可算開被覆 \mathcal{W} であって、各 $W \in \mathcal{W}$ が X 内で相対コンパクトであるようなものが存在する。

以下、Proposition 1.6 を以下の二つの補題の系として示す。

Lemma 1.7. 多様体 M は局所コンパクトである。

Lemma 1.8. X を Hausdorff, 局所コンパクトかつ第二可算公理を満たす位相空間とする. このとき X の locally finite な可算開被覆 \mathcal{W} であって, 各 $W \in \mathcal{W}$ が X 内で相対コンパクトであるようなものが存在する.

Lemma 1.7 を示そう.

Proof. $p \in M$ を任意に固定する. p がコンパクト近傍を持つことを示せばよい. $(O, U, \mathbf{u}) \in \mathcal{A}$ を $p \in O$ となるものとしてとる. \mathbb{R}^k の開集合である U は局所コンパクトなので, $\mathbf{u}(p)$ のコンパクト近傍 V in U がとれる. ここで \mathbf{u} は同相写像で, O が M の開集合であることから, $\mathbf{u}^{-1}(V)$ は p のコンパクト近傍となることが従う. \square

以下, Lemma 1.8 を示す.

Proof of Lemma 1.8. 以下のような三段階に分けて証明を行う.

Step 1: X の可算開被覆 $\{U_k\}_k$ であって, 各 U_k が X 内で相対コンパクトなものが存在する.

Step 2: X の可算開被覆 $\{V_k\}_k$ であって,

$$V_k^- \subset V_{k+1} \quad (\text{for any } k \in \mathbb{N})$$

かつ, 各 V_k が X 内で相対コンパクトなものが存在する.

Step 3: X の locally finite な可算開被覆 $\{W_k\}_k$ であって, 各 W_k が X 内で相対コンパクトなものが存在する.

Step 1: X の可算開被覆 $\{U_k\}_{k=1,2,\dots}$ であって, 各 X が M 内で相対コンパクトなものが存在することを示す. X は第二可算公理を満たすので, 可算開基 \mathcal{B} を持つ. X は Hausdorff (特にコンパクト集合は閉集合) かつ局所コンパクトなので, 各点 $x \in X$ について, \mathcal{B} の元 U_x であって, x の相対コンパクト開近傍となるものがとれる. ここで,

$$\{U_x \mid x \in X\}$$

は \mathcal{B} の部分集合なので可算集合であり我々が求めるものの条件を満たす.

Step 2: X の可算開被覆 $\{V_k\}_{k=1,2,\dots}$ であって,

$$V_{k-1}^- \subset V_k \quad (\text{for any } k \geq 2)$$

かつ, 各 V_k が X 内で相対コンパクトなものが存在することを示す. Step 1 で得られた $\{U_k\}_k$ を固定し, 可算な添え字集合 $\Lambda = \mathbb{N}$ or $\{1, 2, \dots, n\}$ を用いて添え字付けしておく. 帰納的に $\{V_k\}_{k \in \Lambda}$ を以下のように定める.

- $V_1 := U_1$ とする.
- $k \geq 2$ とし, 相対コンパクトな開集合 V_1, \dots, V_{k-1} が定まっているとする. このとき,

$$V_{k-1}^- \subset \bigcup_{1 \leq s \leq N} U_s$$

となるような自然数 N であって, $N \geq k$ となるようなもののうち最小なものを N_k とおく. 上記のような自然数 N が存在することは, V_{k-1}^- がコンパクトかつ $\{U_s\}_s$ が V_{k-1}^- の開被覆であることから従う. ここで

$$V_k := \bigcup_{1 \leq s \leq N_k} U_s$$

と定める. V_k は相対コンパクト開集合であることに注意しておく.

このとき $V_k \supset U_k$ であることから, $\{V_k\}_{k \in \Lambda}$ は X の開被覆である.

$$V_{k-1}^- \subset V_k \quad (\text{for any } k \geq 2)$$

となることは $\{V_k\}_{k \in \Lambda}$ の定め方から従う.

Step 3: X の locally finite な可算開被覆 $\{W_k\}_{k=1,2,\dots}$ であって, 各 W_k が X 内で相対コンパクトなものが存在することを示す. Step 2 で得られた $\{V_k\}_{k \in \Lambda}$ について,

$$W_1 := V_1$$

$$W_2 := V_2$$

$$W_k := V_k \setminus V_{k-2}^- \quad \text{for each } k \geq 3$$

とおく. 以下のことを示せばよい:

- 各 k について, W_k は X 内の相対コンパクト開集合.
- $\{W_k\}_{k \in \Lambda}$ は X の開被覆.
- $\{W_k\}_{k \in \Lambda}$ は locally finite.

まず各 k について, 定義から W_k は X の開集合であり, また,

$$W_k^- \subset V_k^-$$

となることから W_k は X 内で相対コンパクトであることが分かる. また $V_{k-2}^- \subset V_{k-1}$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \bigcup_k W_k &= V_1 \cup V_2 \cup \bigcup_{k \geq 3} (V_k \setminus V_{k-2}^-) \\ &\supset V_1 \cup V_2 \cup \bigcup_{k \geq 3} (V_k \setminus V_{k-1}) \\ &= \bigcup_k V_k = X. \end{aligned}$$

特に $\{W_k\}_k$ は X の開被覆である. 最後に $\{W_k\}_{k \in \Lambda}$ が locally finite であることを示そう. $x \in X$ を任意にとる. $\{V_k\}_{k \in \Lambda}$ は X の開被覆であるから, $x \in V_{k_x}$ となる $k_x \in \Lambda$ がとれる. この k_x について, $k \geq k_x + 2$ のとき

$$V_{k_x} \cap W_k = \emptyset$$

となることに注意すると,

$$\Lambda(V_{k_x}) := \{k \in \Lambda \mid V_{k_x} \cap W_k \neq \emptyset\} \subset \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq k_x + 1\}$$

は有限集合である. これで $\{W_k\}_{k \in \Lambda}$ が locally finite であることが示された. \square

1.3 \mathcal{U} -system

\mathcal{U} を M の開被覆とする. この節では Theorem 1.1 の証明の準備として, 以下で定義する \mathcal{U} -system が存在することを示す.

Definition 1.9. Λ を添え字集合, $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, $\mathcal{O}' = \{O'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を共に Λ で添え字付けられた M 上の開被覆とする. また, $\mathcal{F} = \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を, Λ で添え字付けされた M 上の滑らかな関数の族とする. 四つ組

$$(\Lambda, \mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{F})$$

が以下の4条件を満たすとき, \mathcal{U} -system と呼ぶことにする (このノートの独自の用語なので注意).

Condition (i) $O'_\lambda \subset O_\lambda$ for each $\lambda \in \Lambda$.

Condition (ii): The open cover $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ is locally finite.

Condition (iii): For each $\lambda \in \Lambda$, there exists $U \in \mathcal{U}$ such that $O_\lambda \subset U$.

Condition (iv): For each $\lambda \in \Lambda$,

$$\text{supp } f_\lambda \subset O_\lambda$$

and $f_\lambda(x) > 0$ for any $x \in O'_\lambda$.

この節の目標は以下の命題を示すことである.

Proposition 1.10. \mathcal{U} -system は存在する.

Proposition 1.10 の証明を述べよう.

Proof of Proposition 1.10. まず記号の準備として, $c \in \mathbb{R}^k$, $r > 0$ について,

$$B_r^\circ(c) := \{x \in \mathbb{R}^k \mid \|x - c\| < r\}$$

とおく. Proposition 1.6 より, 相対コンパクトな開集合からなる locally finite な M の開被覆 \mathcal{W} がとれる. 各点 $p \in M$ において, 以下の条件を満たす $(O_p, V_p, \mathbf{v}_p) \in \mathcal{A}$ をそれぞれ一つずつ選んで固定する.

- $B_3^\circ(\mathbf{v}(p)) \subset V_p$.
- ある $U \in \mathcal{U}$ について, $V_p \subset U$.
- $p \in W$ となる任意の $W \in \mathcal{W}$ について, $O_p \subset W$ (\mathcal{W} が locally finite であることから

$$\bigcap_{W \in \mathcal{W} \text{ with } p \in W} W \subset M$$

は p の開近傍となることに注意).

ここで

$$O'_p := \mathbf{v}^{-1}(B_1^\circ(\mathbf{v}(p))) \subset O_p$$

とおく. 各 $W \in \mathcal{W}$ について, W^- がコンパクトであることから, W^- の開被覆

$$\{O'_p \mid p \in W^-\}$$

は有限部分被覆を持つ. つまり, 有限点列

$$p(W, 1), \dots, p(W, k_W) \subset W^-$$

であって

$$\bigcup_{i=1}^{k_W} O'_{p(W,i)} \supset W^-$$

となるようなものがとれる. 以下, 各 $W \in \mathcal{W}$ について上記のような $\{p(W,1), \dots, p(W, k_W)\}$ を固定し,

$$\Lambda := \{(W, i) \mid W, i = 1, \dots, k_W\}$$

とおく. 各 $\lambda = (W, i) \in \Lambda$ について,

$$O_\lambda := O_{p(W,i)}, \quad O'_\lambda := O'_{p(W,i)}$$

とし, M 上の関数 f_λ を

$$f_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \begin{cases} b_{0,1}^\lambda(\mathbf{v}(p)) & \text{if } p \in O_\lambda \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

と定める. ただし $b_{0,1}^\lambda := b_{0,1}^{p(W,i)} \in C^\infty(\mathbb{R}^k)$ は Proposition 1.3 の意味のものとする. このとき Proposition 1.4 より, f_λ は C^∞ 級であり, また

$$\text{supp } f_\lambda \subset O_\lambda$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{O} &:= \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \\ \mathcal{O}' &:= \{O'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \\ \mathcal{F} &:= \{f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \end{aligned}$$

とおく. この $(\Lambda, \mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{F})$ が \mathcal{U} -system であることを示そう. \mathcal{U} -system の条件のうち, Condition (ii) 以外はこれまでの議論から簡単に確認できる. Condition (ii), すなわち \mathcal{O} が locally finite であることを確認しよう. 任意に $p \in M$ をとる. \mathcal{W} は locally finite なので, ある p の開近傍 U_p であって,

$$\mathcal{W}(U_p) := \{W \in \mathcal{W} \mid W \cap U_p \neq \emptyset\}$$

が有限集合であるようなものがとれる. ここで

$$\Lambda(U_p) := \{\lambda \in \Lambda \mid O_\lambda \cap U_p \neq \emptyset\}$$

が有限集合であることを示せばよい. まず

$$U'_p := \bigcup_{W \in \mathcal{W}(U_p)} W$$

とおくと, U'_p は相対コンパクトである. \mathcal{W} は locally finite であることから

$$\mathcal{W}(U'_p) := \{W \in \mathcal{W} \mid U'_p \cap W \neq \emptyset\}$$

も有限集合であることが分かる. 従って, 任意の $\lambda = (W_0, i) \in \Lambda(U_p)$ について, $W_0 \in \mathcal{W}(U'_p)$ となることを示せば十分である. $\lambda = (W_0, i) \in \Lambda$ を任意にとる. $W_0 \notin \mathcal{W}(U'_p)$ を仮定して, $\lambda \notin \Lambda(U_p)$ を示そう. U'_p が開集合であることから,

$$W_0^- \cap U'_p = \emptyset$$

であることに注意すると, 特に

$$p(W_0, i) \notin U'_p$$

である. ここで $p(W_0, i) \in W'$ となる $W' \in \mathcal{W}$ を一つ選んで固定すると, U'_p の定義から,

$$W' \cap U_p \neq \emptyset$$

でなければならないことが分かる. また $p(W_0, i) \in W' \in \mathcal{W}$ なので,

$$O_\lambda = O_{p(W_0, i)} \subset W'$$

でなければならない. これより $O_\lambda \cap U_p = \emptyset$ であり, 特に $\lambda \notin \Lambda(U_p)$ である. これで主張は示された. \square

1.4 Proof of Theorem 1.1

Theorem 1.1 の証明を述べよう.

\mathcal{U} を M の開被覆とする. まず Proposition 1.10 より \mathcal{U} -system

$$(\Lambda, \mathcal{O}, \mathcal{O}', \mathcal{F})$$

がとれる. このとき, M の開被覆 $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が locally finite であることと, $\text{supp } f_\lambda \subset O_\lambda$ for each $\lambda \in \Lambda$ であることから,

$$\{\text{supp } f_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$$

も locally finite であることが分かる. 特に,

$$h : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \sum_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(p)$$

は well-defined であり, $h \in C^\infty(M)$ となる. また, 各 $\lambda \in \Lambda$ について f_λ が O'_λ 上で正の値をとることと, $\{O'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が M の開被覆になることから, h は M 上で常に正の値をとることも分かる.

ここで, 各 $\lambda \in \Lambda$ について,

$$\psi_\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto \frac{f_\lambda(p)}{h(p)}$$

は well-defined で C^∞ 級となる. 以下の Claim を示せば, Theorem 1.1 の証明が完成する.

Claim: $\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は弱い意味で \mathcal{U} に従う 1 の分割である.

$\{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が Conditions (1),(2),(3),(4) を満たすことを確認しよう.

Condition (1) について: $\lambda \in \Lambda$ を固定する. 関数 h の定義から,

$$0 \leq f_\lambda(p) \leq h(p) \quad \text{for any } p \in M$$

となる. 特に

$$\psi_\lambda(p) := \frac{f_\lambda(p)}{h(p)} \in [0, 1] \quad \text{for any } p \in M$$

である.

Condition (2) について: $\lambda \in \Lambda$ を固定する. \mathcal{U} -system の定義から $O_\lambda \subset U$ となる $U \in \mathcal{U}$ が存在するのであった. この U について, ψ_λ の定義から

$$\text{supp } \psi_\lambda \subset \text{supp } f_\lambda \subset O_\lambda \subset U$$

を得る.

Condition (3) について: 上で述べたことにより, 各 $\lambda \in \Lambda$ について,

$$\text{supp } \psi_\lambda \subset O_\lambda.$$

特に $\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が locally finite であることから $\{\text{supp } \psi_\lambda\}$ も locally finite である.

Condition (4) について: 点 $p \in M$ を固定する. 上で確認した Condition (3) より,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_{\lambda}(p)$$

が有限和として定義されることに注意しておく. これより,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_{\lambda}(p) &= \sum_{\lambda \in \Lambda} \frac{f_{\lambda}(p)}{h(p)} \\ &= \frac{1}{h(p)} \sum_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda}(p) \\ &= \frac{1}{h(p)} h(p) \\ &= 1. \end{aligned}$$

これで, $\{\psi_{\lambda}\}_{\lambda \in \Lambda}$ は弱い意味で \mathcal{U} に従う 1 の分割となることが示された.