幾何学D・多様体幾何基礎B（担当：奥田隆幸）

参考文献

- 森田茂之「微分形式の幾何学」(岩波)
- John. M. Lee「Introduction to smooth manifolds」
  (Springer, GTM)

成績について

全２回のレポート評価

内容：講義中に証明を省略したところのうち指定されたものからいくつか選んで証明を付ける

（詳細はまたアナウンスする）

初回は12月23日しめきり予定

Section 0：講義概要の説明

内容：
- 多様体上のテンソル場
- 微分形式のリーマン積分
- de Rham 理論

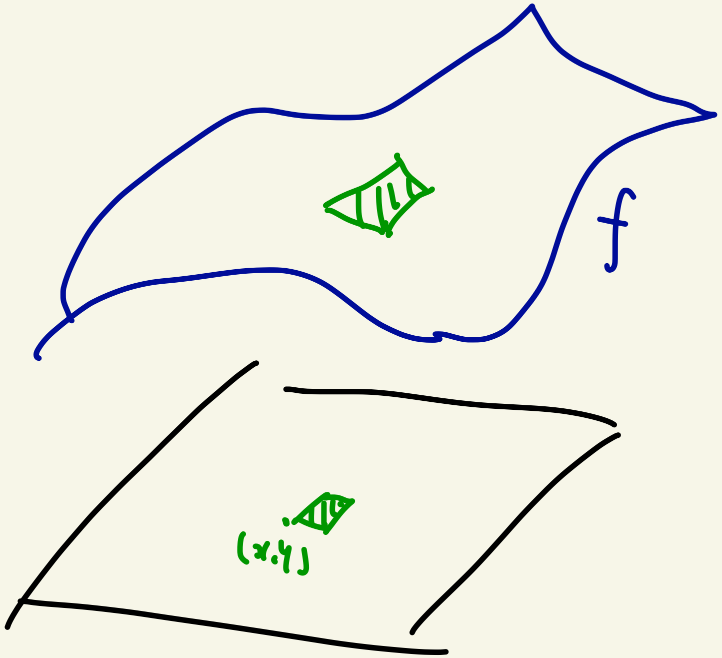
テンソル場：多様体上の幾何構造など
を定義するために便利な概念

ex：リーマン計量
複素構造
微分形式　など

微分形式：

$D := [0,1] \times [0,1] \ (\subset \mathbb{R}^2)$ とおく

$f(x,y)$: D 上の連続関数とする.



"f の D 上のリーマン積分"

$$\int_D f(x,y) \underline{dx\,dy}$$

↑ これは "何者" か？

"$dx\,dy$" の気持ち：

"微小四角形の面積" を定めるもの

問：この "$dx\,dy$" は厳密には何なのか？

答：微分形式（と思ってよい）

⇝ 多様体上でテンソル場の一種として
一般的に定式化を行う

多様体上のリーマン積分論

- M : m-次元 C^∞-級多様体
- D : k-次元積分領域 (a compact oriented k-dim'l submanifold with boundary in M)
- ω : k-次微分形式 (気持ち: k-次元微小四角形の体積をさだめるもの)
- f : M 上の C^∞-級関数

$\rightsquigarrow$ f の ω による D 上のリーマン積分

"$\displaystyle\int_D f\omega$" が定義できる!

Stokes の定理

(重要定理!)

∂D : D の境界

η : $k-1$ 次微分形式

$d\eta$: η の "外微分" とする.

(k 次微分形式になる)

このとき $$\int_D d\eta = \int_{\partial D} \eta$$

"微積分の基本定理" の一般化

de Rham 理論

Ω : compact oriented k-dim'l submanifold without boundary in M

$(\partial\Omega = \emptyset)$

を(今日だけ) k-サイクルと呼ぶ

問 : k-サイクル Ω であって,

"$\Omega = \partial D$ となる $k+1$ 次元の D が存在しない" ものはどれだけある?

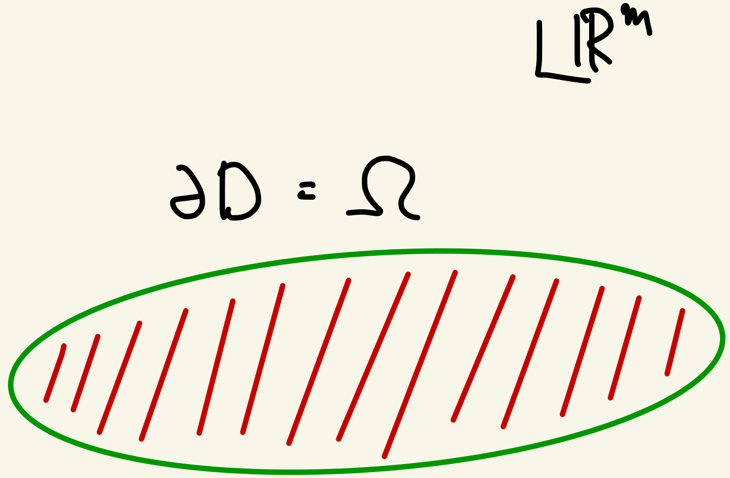
($\rightsquigarrow$ M の穴の情報 : ホモロジー理論)

例: $M = \mathbb{R}^m$ のとき

$^\forall \Omega$: k-サイクル,

$^\exists D$ s.t. $\partial D = \Omega$

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{R}^m$ に穴はない!

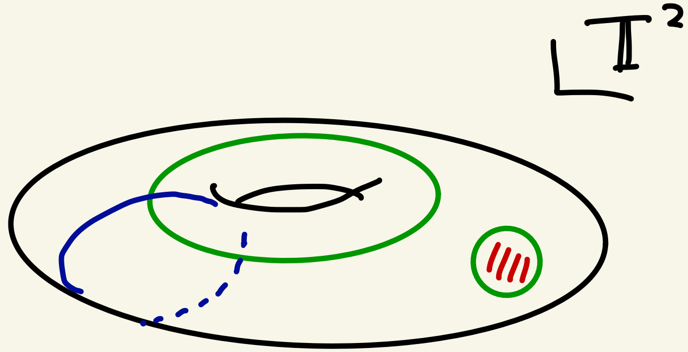


例: $M = \mathbb{T}^2 := S^1 \times S^1$ のとき

1-サイクル Ω で

"$\Omega = \partial D$" とならないものが

"2種類"ある.



$\rightsquigarrow$ $\mathbb{T}^2$ に"1次元穴"がある!

Ω : k-サイクル in M を fix

どうやって "$\Omega = \partial D$ となる D の非存在" を示す?

(十分条件が欲しい)

ω : k-次微分形式 with $d\omega = 0$

Theorem : $\int_\Omega \omega \neq 0 \Rightarrow \Omega = \partial D$ となる D は存在しない

(Proof) : 対偶を示す. $\Omega = \partial D$ とする.

Stokes の定理から

$$\int_\Omega \omega = \int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega = \int_D 0 = 0 \quad \blacksquare$$

従って

$\{\omega : k$次微分形式 $\mid d\omega = 0\}$ は

"M の k-次元穴" の探知機 として使える.

実は次で成り立つ

Theorem $d\omega = 0$ となる k 次微分形式 ω について

以下の2条件は同値

(i) $\exists \Omega : k$-サイクル s.t. $\int_\Omega \omega \neq 0$

(ii) $\neg(\exists \eta : k-1$ 次微分形式 s.t. $d\eta = \omega)$

探知機として働く

$$\{\omega : k\text{次微分形式} \mid d\omega = 0\} \Big/ \left\{\omega \;\middle|\; \begin{array}{l} d\omega = 0 \\ \exists \eta \ \text{s.t.}\ d\eta = \omega \end{array}\right\}$$

k次元穴の探知機

やくにたたないものを捨てた

$$\parallel$$

$$H^k_{DR}(M ; \mathbb{R})$$

"役に立つ探知機の集まり"

k次の de Rham コホモロジー

de Rham の定理

M の位相についての情報

$$\dim H^k_{DR}(M ; \mathbb{R}) = \dim H_k(M ; \mathbb{R})$$

微分方程式などを用いて計算しやすい情報

(k 次ホモロジー群/$\mathbb{R}$)

特に $H^k_{DR}(M ; \mathbb{R})$ はホモトピー不変