Section 1：有限次元ベクトル空間のテンソル積

内容
- 多重線型写像
- 双対空間
- テンソル積の定義

当面の目標：多様体上のテンソル束を定義する。

Section 1.1：ベクトル値写像のなすベクトル空間

設定：U：ベクトル空間$/\mathbb{R}$

└ Ω：集合

記号：$\mathrm{Map}(\Omega, U) := \{ f : \Omega \to U$ 写像$\}$

└

Prop 1.1.1 : $\mathrm{Map}(\Omega, U)$ は以下の和，スカラー倍についてベクトル空間である．

和 : $y_1 + y_2 : \Omega \to U, \quad \omega \mapsto y_1(\omega) + y_2(\omega)$

$(y_1, y_2 \in \mathrm{Map}(\Omega, U))$

スカラー倍 : $\lambda \cdot y : \Omega \to U, \quad \omega \mapsto \lambda \cdot y(\omega)$

$(y \in \mathrm{Map}(\Omega, U),\ \lambda \in \mathbb{R})$

（ゼロベクトルは "$\Omega \to U,\ \omega \mapsto 0$"）

Section 1.2: 有限個の線型写像のなすベクトル空間

設定: I : 集合

$\{W_i\}_{i\in I}$: ベクトル空間$/\mathbb{R}$ の族

U : ベクトル空間$/\mathbb{R}$

記号: $\prod_{i\in I} W_i := \{ (w_i)_{i\in I} \mid w_i \in W_i \text{ for each } i \in I \}$

: $\{W_i\}_{i\in I}$ の直積集合

Def 1.2.1: 写像 $\alpha : \prod_{i \in I} W_i \to U$ が 多重線型 (multi-linear)

$\overset{\Longleftrightarrow}{\text{def}}$ "各成分ごとに 線型"

つまり

$\forall i_0 \in I, \quad \forall (w_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}} \in \prod_{i \in I \setminus \{i_0\}} W_i$

$\tilde{\alpha} : W_{i_0} \to U, \quad w_{i_0} \mapsto \alpha((w_i)_{i \in I})$

が 線型$/\mathbb{R}$.

Def 1.2.2:

$ML(\{W_i\}_{i \in I}, U) := \{\alpha : \prod_{i \in I} W_i \to U \mid$ 多重線型 $\}$ とおく.

$\sim\!\alpha$ 一般的な記号ではないので注意

Ex:

$I = \{1, 2\}$, $W_i = \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$, $U = \mathbb{R}$ のとき

$\prod_{i \in I} W_i = \mathbb{R}^2$ であり

$\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto xy$

$\beta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ とおく

このとき $\alpha \in ML(\{W_i\}_{i \in I}, U)$ かつ

$\beta \notin ML(\{W_i\}_{i \in I}, U)$

"$\prod_{i \in I} W_i$" をベクトル空間と認識してしまうと混乱するので注意.

Remark 1.2.3 :

- $\#I = 1$ のとき $\{W\}_{i\in I} = \{W\}$ とおくと,

$$ML(\{W\}, U) = \{\alpha : W \to U : \text{線型}\}$$

$L(W, U) := ML(\{W\}, U)$ とおく.

- $\#I = 2$ のとき

$$ML(\{W_1, W_2\}, U) = \{\alpha : W_1 \times W_2 \to U : \text{双線型}\}$$

- $\#I = 0$ のとき

$$ML(\{\}, U) \cong U$$

$\left(\{\alpha : \underbrace{\emptyset}_{\text{1点集合}} \to U\} \ \text{''} \right)$

（"お約束"と思って構わない）

Prop 1.2.4: $ML(\{W_i\}_{i\in I}, U)$

は $Map(\prod_{i\in I} W_i, U)$ の線型部分空間$/\mathbb{R}$.

特に $ML(\{W_i\}_{i\in I}, U)$ は ベクトル空間$/\mathbb{R}$.

Hint:

示 ① ゼロベクトル $\in MHom_{\mathbb{R}}(\{W_i\}_{i\in I}, U)$

② 和で閉じる.

③ スカラー倍で閉じる.

Section 1.3 : 双対空間

設定 : V : 有限次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$

Def 1.3.1 : $V^\vee := ML(\{V\}, \mathbb{R})$

$:= \{ f : V \to \mathbb{R} \mid$ 線型 $\}$

を V の双対空間と呼ぶ

Rem 1.3.2 : Prop 1.2.4 の意味で

$V^\vee$ はベクトル空間$/\mathbb{R}$

◎ 再帰性

$V^\vee$ の双対空間 $(V^\vee)^\vee$ を考える.

<u>Thm 1.3.3</u>

V と $(V^\vee)^\vee$ は自然に同型である.

すなわち各 $v \in V$ について

$\phi_v : V^\vee \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto y(v)$ とおくと

$\phi_v \in (V^\vee)^\vee$ であり,

$\phi : V \to (V^\vee)^\vee, \quad v \mapsto \phi_v$ は線型同型

Hint: 同型の証明は "ϕの単射性" + 次元のギロンが楽

Remark 1.3.4 :

V と $V^\vee$ は線型同型ではあるが

"基底をとる" などしないと同型写像が作れない.
"内積を定める"

双対基底

Thm 1.3.5:

$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_n\}$ を V の基底とする。

このとき 各 $j = 1, \cdots, n$ について

$$e_j^\vee : V \to \mathbb{R}, \quad v = \sum_i a_i e_i \mapsto a_j$$

と定めると

$\mathcal{B}^\vee := \{e_1^\vee, \cdots, e_n^\vee\}$ は $V^\vee$ の基底となる.

$V^\vee$ の $\mathcal{B}$ についての双対基底

特に $\dim_{\mathbb{R}} V = \dim_{\mathbb{R}} V^\vee$.

Section 1.4：テンソル積

設定：I：有限集合

$\{V_i\}_{i\in I}$：有限次元ベクトル空間の有限族

記号：各 $i \in I$ について

$V_i^\vee$ を V_i の双対空間とする.

Def 1.4.1 :

$\bigotimes_{i \in I} V_i := ML(\{V_i^\vee\}_{i \in I}, \mathbb{R})$ とおく.

$\{V_i\}_{i \in I}$ のテンソル積空間

Rem 1.4.2 : Prop 1.2.4 の意味で $\bigotimes_{i \in I} V_i$ はベクトル空間 $/\mathbb{R}$

Prop 1.4.3: 各 $(v_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i$ について

$$\bigotimes_{i\in I} v_i : \prod_{i\in I} V_i^\vee \to \mathbb{R}, \quad (g_i)_{i\in I} \mapsto \prod_{i\in I} g_i(v_i)$$

は多重線型. 特に $\bigotimes_{i\in I} v_i \in \bigotimes_{i\in I} V_i$

Prop 1.4.4: $\bigotimes : \prod_{i\in I} V_i \to \bigotimes_{i\in I} V_i$, $(v_i)_{i\in I} \mapsto \bigotimes_{i\in I} v_i$

は多重線型.

① 各種テンソル積

Remark 1.4.5:

- $\# I = 1$ のとき $\{V_i\}_{i\in I} = \{V\}$ とおくと,

$$\bigotimes_{i\in I} V_i = \{V^\vee \to \mathbb{R} \mid \text{線型}\}$$

$$= (V^\vee)^\vee \underset{\text{再帰性}}{\cong} V$$

- $I = \emptyset$ のとき $\bigotimes_{i\in I} V_i := ML(\{\}, \mathbb{R})$

$\cong \mathbb{R}$ とみなす.

- $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ のとき

$$\bigotimes_{i \in I} V_i \quad \text{を} \quad V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$$

のように書く.

- 有限次元ベクトル空間 V について

再帰性 (Thm 1.3.3) より $(V^\vee)^\vee$ と V を同一視すると

$V^\vee \otimes V^\vee = ML(\{V, V\}, \mathbb{R}) = \{V$ 上の双線型形式$\}$ とみなせる.

特に $\{V$ 上の内積$\} \subset V^\vee \otimes V^\vee$.

◎ テンソル積空間の基底の構成

Thm 1.4.6 :

各 $i \in I$ について V_i の基底 $\mathcal{B}_i = \{e^i_1, \dots, e^i_{n_i}\}$ を固定する

$(n_i := \dim V_i)$

このとき

$$\bigotimes \left(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i \right) = \left\{ \bigotimes_{i \in I} e^i_{k_i} \;\middle|\; k_i \in \{1, \dots, n_i\} \ (i \in I) \right\}$$

は $\bigotimes_{i \in I} V_i$ の基底.

特に $\dim \bigotimes_{i \in I} V_i = \prod_{i \in I} \dim V_i$

Thm 1.4.6 の Hint : 各 $i \in I$ について

$\mathcal{B}_i^\vee$ を $V_i^\vee$ の $\mathcal{B}_i$ についての双対基底とする.

このとき以下が成り立つ

Lemma 1.4.7

線型同型

$$\bigotimes_{i\in I} V_i \simeq \mathrm{Map}\left(\prod_{i\in I} \mathcal{B}_i^\vee, \mathbb{R}\right)$$

$$\alpha \longmapsto \alpha\big|_{\prod_{i\in I}\mathcal{B}_i^\vee}$$

$\prod_{i\in I} V_i \to \mathbb{R}$

Remark 1.4.8 :

$\bigotimes : \prod_{i \in I} V_i \to \bigotimes_{i \in I} V_i , \quad (v_i)_{i \in I} \mapsto \bigotimes_{i \in I} v_i$

の像は $\bigotimes_i V_i$ を張るが全射ではない！

(よく間違えやすい)

Prop 1.4.9: (e_1, e_2) を $\mathbb{R}^2$ の標準基底とする.

このとき $e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 \in \mathbb{R}^2 \otimes \mathbb{R}^2$ について

$\nexists \{v, w\} \subset \mathbb{R}^2$ s.t.

$$e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2 = v \otimes w$$

◎ 添え字集合のとり換え

Thm 1.4.10 J を有限集合とし，$\tau : J \to I$ を全単射とする．

各 $j \in J$ について $V_j := V_{\tau(j)}$ とおく．

このとき $\bigotimes_{j\in J} V_j \overset{\exists!}{\cong} \bigotimes_{i\in I} V_i$ 線型同型

s.t.

$$\bigotimes_{j\in J} v_j \longleftrightarrow \bigotimes_{i\in I} v_{\tau(j)} \quad \left({}^{\forall} (v_j)_{j\in J} \in \prod_{j\in J} V_j \right)$$

Cor 1.4.11 : 有限次元ベクトル空間 V, W について（$/\mathbb{R}$）

$$V \otimes W \overset{\exists !}{\cong} W \otimes V \ : \text{線型同型}$$

s.t.

$$v \otimes w \longleftrightarrow w \otimes v \quad \left({}^{\forall}(v, w) \in V \times W \right)$$

Section 1.5 : テンソル積と線型写像

設定 : I : 有限集合

$\{V_i\}_{i\in I}, \{W_i\}_{i\in I}$: 有限次元ベクトル空間の有限族

記号 : $L(V_i, W_i) := \{ A : V_i \to W_i \mid$ 線型 $\}$

Prop 1.5.1 : $\{A_i \in L(V_i, W_i)\}_{i \in I}$ とする.

このとき $\exists!\, \Theta = \Theta(\{A_i\}_i) \in L\left(\bigotimes_{i \in I} V_i, \bigotimes_{i \in I} W_i\right)$ s.t.

$$\Theta\left(\bigotimes_{i \in I} v_i\right) = \bigotimes_{i \in I} (A_i v_i) \quad \left({}^{\forall} (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i\right)$$

(Hint : Thm 1.4.6)

Thm 1.5.2 :

$$\bigotimes_{i \in I} \mathcal{L}(V_i, W_i) \overset{\exists !}{\cong} \mathcal{L}\left(\bigotimes_{i \in I} V_i, \bigotimes_{i \in I} W_i\right) \quad : \text{線型同型}$$

s.t.

$$\bigotimes_{i \in I} A_i \longleftrightarrow \theta(\{A_i\}_{i \in I}) \qquad \left(\forall (A_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{L}(V_i, W_i)\right)$$

(Hint : Section 1.6, 1.7)

Thm 1.5. : V, W : 有限次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$ とおく.

$$V^\vee \otimes W \overset{\exists !}{\cong} \mathcal{L}(V, W) : \text{線型同型}$$

s.t.

$$g \otimes w \longmapsto \Phi_{g,w} : V \to W \quad \left(\forall (g, w) \in V^\vee \times W \right)$$

$$v \mapsto \underbrace{g(v)}_{\in \mathbb{R}} \cdot w$$

Section 1.6 : テンソル積の普遍性 (講義では省略)

設定 : I : 有限集合

$\{V_i\}_{i\in I}$: 有限次元ベクトル空間の有限族

Def 1.6.1 (テンソル積の普遍性)

Z : 有限次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$

$\iota \in ML(\{V_i\}_{i\in I}, Z)$ とする.

(Z, ι) が "$\{V_i\}_{i\in I}$ のテンソル積の普遍性 (universality)" を満たす

とは以下の★が成り立つこととする.

★ $\forall U$: ベクトル空間$/\mathbb{R}$, $\forall \varphi \in ML(\{V_i\}_{i\in I}, U)$

$\exists! \tilde{\varphi} : Z \to U$: 線型写像

s.t. $\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$.

(図式
$$\begin{tikzcd} \prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\iota_U"'] & Z \arrow[d, dashed, "\varphi_U"] \\ & U \end{tikzcd}$$
)

Prop 1.6.2 (一意性):

(Z_1, z_1), (Z_2, z_2) が共に

$\{V_i\}_{i\in I}$ のテンソル積の普遍性を満たすとする.

このとき $\exists! \ \theta : Z_1 \to Z_2$: 線型同型 s.t. $\theta \circ z_1 = z_2$

Thm 1.6.3 (存在)

$\left(\bigotimes_{i\in I} V_i , \otimes\right)$ は $\{V_i\}_{i\in I}$ のテンソル積の普遍性を満たす.

Def 1.4.1 　 Prop 1.4.4

(Hint : Thm 1.4.6)

Rem 1.6.4 :

Def 1.6.1 の $(\mathbb{Z}, 1)$ を "$\{V_i\}_{i\in I}$ のテンソル積" と呼ぶ流儀もある (代数派?)

Prop 1.6.2 の意味で Section 1.4 の定義と一致する.

Cor 1.6.5:

$\forall U$: ベクトル空間 $/\mathbb{R}$

$$ML(\{V_i\}_{i\in I}, U) \to \{\bigotimes_{i\in I} V_i \to U \mid 線型\}$$

$$\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$$

Def 1.6.1 普 の意味

は全単射

Section 1.7 : テンソル積の各種性質（講義では省略）

設定 : I : 有限集合

$\{V_i\}_{i\in I}$: 有限次元ベクトル空間の有限族

@ 係数体の単位性

Thm 1.7.1: $i_0 \in I$ について $V_{i_0} = \mathbb{R}$ であるとする.

このとき

$$\bigotimes_{i \in I} V_i \overset{\exists !}{\cong} \bigotimes_{i \in I \setminus \{i_0\}} V_i \quad : \text{線型同型}$$

s.t.

$$\bigotimes_{i \in I} v_i \longmapsto \underbrace{v_{i_0}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \left(\bigotimes_{i \in I \setminus \{i_0\}} v_i \right) \qquad \left({}^{\forall} (v_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} V_i \right)$$

◎ 結合性

Thm 1.7.2 $I = I_1 \sqcup I_2$ を I の分割とする.

このとき

$$\bigotimes_{i\in I} V_i \overset{\exists 1}{\cong} \left(\bigotimes_{i\in I_1} V_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{j\in I_2} V_j\right) : \text{線型同型}$$

s.t.

$$\bigotimes_{i\in I} v_i \longleftrightarrow \left(\bigotimes_{i\in I_1} v_i\right) \otimes \left(\bigotimes_{j\in I_2} v_j\right) \quad \left({}^{\forall}(v_i)_i \in \prod_{i\in I} V_i\right)$$

Cor 1.7.3　有限次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$ U, V, W について

$$(U\otimes V)\otimes W \overset{\exists !}{\simeq} U\otimes V\otimes W \overset{\exists !}{\simeq} U\otimes(V\otimes W) \quad : \text{線型同型}$$

$$(u\otimes v)\otimes w \leftrightarrow u\otimes v\otimes w \leftrightarrow u\otimes(v\otimes w) \quad \left({}^{\forall}(u, v, w)\in U\times V\times W\right)$$

◎ 双対とテンソル積

Thm 1.7.4 $\bigotimes_{i\in I} V_i^{\vee} \overset{\exists !}{\cong} \left(\bigotimes_{i\in I} V_i\right)^{\vee}$: 線型同型

s.t.

$$\bigotimes_{i\in I} g_i \leftrightarrow \widetilde{\left(\prod_{i\in I} g_i\right)} \qquad \left(\forall (g_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} V_i^{\vee}\right)$$

ただし $\prod_{i\in I} g_i \in ML(\{V_i\}_{i\in I}, \mathbb{R})$ を

$\prod_i g_i : \prod_{i\in I} V_i \to \mathbb{R},\ (v_i)_i \mapsto \prod_{i\in I} g_i(v_i)$ と定め、

Cor 1.6.5 の意味で $\widetilde{\prod_{i\in I} g_i} : \bigotimes_{i\in I} V_i \to \mathbb{R}$ を定めた.

＠テンソル積の随伴性．

Thm 1.7.5：有限次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$ U, V, W について

- $$\mathcal{L}(U\otimes V, W) \xrightarrow{\Phi} \mathcal{L}(V, \mathcal{L}(U, W))$$

$$A \longmapsto \Phi A : V \to \mathcal{L}(U, W)$$

$$v \mapsto \begin{pmatrix} U \to W \\ u \mapsto A(u\otimes v) \end{pmatrix}$$

は線型同型