Section 2 : 多様体論の復習

内容 :

- $\mathbb{R}$代数
- C^∞級多様体, C^∞級関数, 接空間
- C^∞級写像とその微分.
- 開部分多様体
- Cut-off 関数

当面の目標 : 多様体上のテンソル束を定義する.

§2.1 : $\mathbb{R}$代数

Def 2.1.1 $(A, \cdot)$ が $\mathbb{R}$代数

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} A : \text{ベクトル空間}/\mathbb{R} \\ \cdot : V \times V \to V : \text{双線型写像} \end{cases}$$

← A の積　　$\left(\cdot \in ML(\{V, V\}, V) \right)$

$A = (A, \cdot)$: $\mathbb{R}$代数とする.

Def 2.1.2 : A が …

結合的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $(\forall a, b, c \in A)$

単位的 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists! \, 1_A \in A$ s.t. $a \cdot 1_A = 1_A \cdot a = a$ $(\forall a \in A)$

可換 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $a \cdot b = b \cdot a$ $(\forall a, b \in A)$

§2.2 : C^∞-mfd

M : 位相空間, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を fix

Def 2.2.1 : $O \underset{\text{open}}{\subset} M$, $U \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^n$ とし,

相対位相により位相空間とみなす.

また $u : O \to U$ を同相写像とする.

このとき 組 (O, U, u) を M の n 次元局所座標系,

u を O 上の局所座標とよぶ

Def 2.2.2

この講義では

$$\mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n) := \{(O,U,u) \mid M\text{の}n\text{次元局所座標系}\}$$

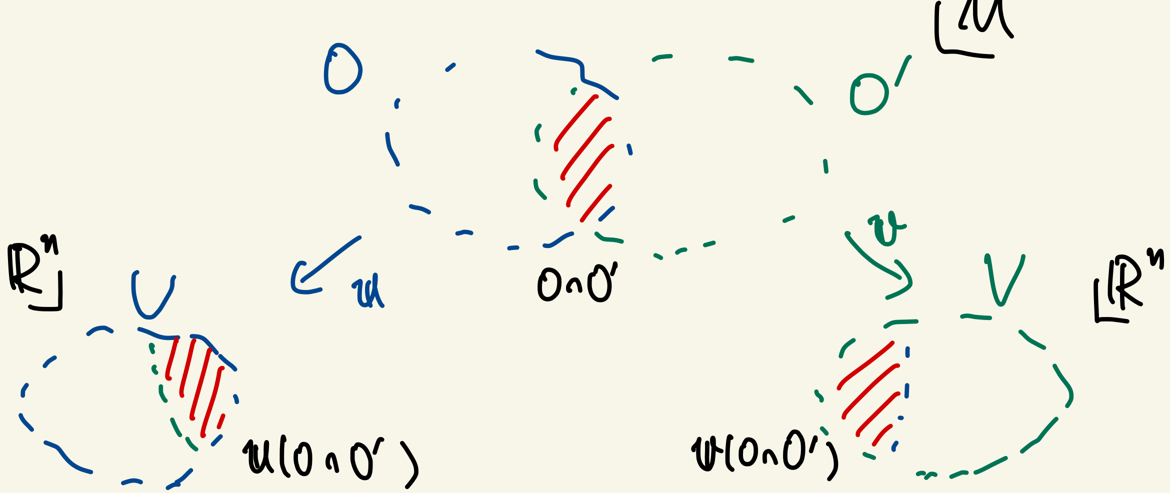
とおく（独自記号なので注意）

Def. 2.2.3 :

$$\tau_{uv} : u(O \cap O') \to v(O \cap O')$$
$$u \mapsto v(u^{-1}(u))$$

$$\left(\text{i.e. } \tau_{uv} = v|_{O \cap O'} \circ (u|_{O \cap O'})^{-1} \right)$$

を (O, U, u) から (O', V, v) への座標変換という.



Def 2.2.4

$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M;\mathbb{R}^n)$ が

M の atlas

$\overset{\text{def}}{\iff}$ (1) $\bigcup O = M$ (地図帳)

& $(O, U, u) \in \mathcal{A}_0$ ← すべての地点をカバー

(2) $\forall (O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0$,

$\tau_{uv} : \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\cap \text{ open}}}{u(O \cap O')} \to \underset{\underset{\mathbb{R}^n}{\cap \text{ open}}}{v(O \cap O')}$ は C^∞ 級

地図間の整合性

M 上の atlas は極大なものを考えておくと

いろいろ都合がよい

Def 2.2.5 M 上の atlas $\mathcal{A}$ が極大

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{LC}(M; \mathbb{R}^n)$ となる

atlas $\mathcal{B}$ on M が存在しない

Theorem 2.2.6 : $\mathcal{A}_0$ を atlas on M とする.

(1) $\mathcal{A}_0$ を含む極大 atlas $[\mathcal{A}_0]$ on M がただ一つ存在する.

地図帳 $\mathcal{A}_0$ の完全版

(2) $[\mathcal{A}_0] = \{ (O, U, u) \in LC(M; \mathbb{R}^n) \mid$

$\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_0,$

τ_{uv}, τ_{vu} は C^∞ 級 $\}$

Def 2.2.7 : $(M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞ 級多様体

(C^∞-manifold, smooth manifold)

"n-mfd" と略す

$\overset{\text{def}}{\iff}$
$$\begin{cases} M \text{ は Hausdorff かつ 第二可算公理を満たす位相空間} \\ \mathcal{A} \subset LC(M; \mathbb{R}^n) \text{ は 極大 atlas on } M \end{cases}$$

i.e. 可算開基が存在する.

Remark : 第二可算公理は"積分"の定義に必要.

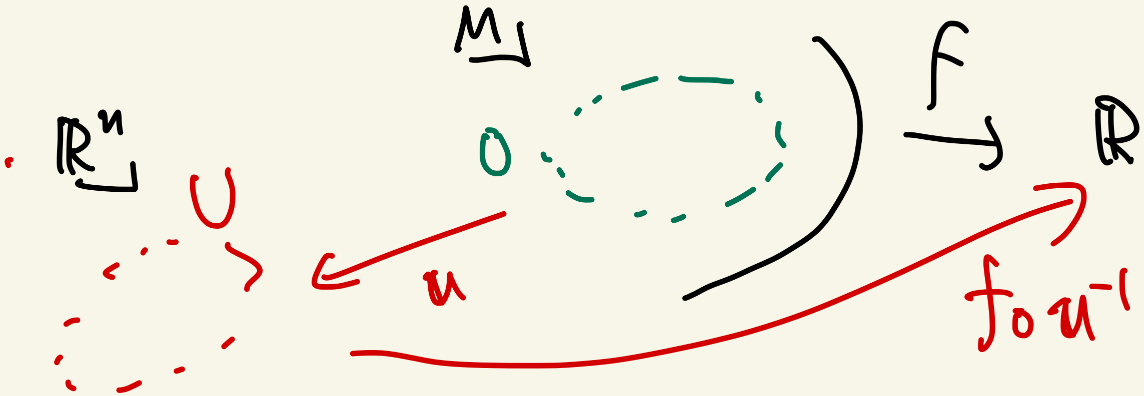
§2.3 C^∞級関数

設定 : $(M, \mathcal{A})$: n-mfd

Def 2.3.1 :

関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が $(M, \mathcal{A})$ 上 C^∞級

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$, $f \circ u^{-1} \in C^\infty(U)$



Def 2.3.2:

$C^\infty(M) = C^\infty(M, \mathcal{A}) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid (M, \mathcal{A})$ 上 C^∞ 級 $\}$

$\mathcal{A}$ は略す

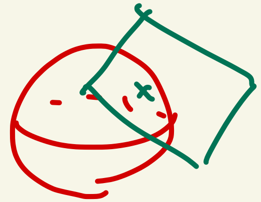
Prop 2.3.3:

$C^\infty(M)$ は関数の和とスカラー倍について可換 $\mathbb{R}$-代数をなす.

(結合的, 単位的)

§2.4：接空間

設定　M：n-mfd
$p \in M$



$C^\infty(M)$ 上の線型汎関数

Def 2.4.1：

線型写像 $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ で

点 $p \in M$ における接ベクトル

$$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad v(f \cdot g) = v(f) \cdot g(p) + f(p) \cdot v(g)$$
$$\left({}^\forall f, g \in C^\infty(M) \right)$$

p におけるライプニッツ則

Def. 2.4.2 : M の p における接空間

$T_pM := \{ v : C^\infty(M) \to \mathbb{R} \mid v$ は p における接ベクトル $\}$

Prop. 2.4.3

T_pM は汎関数の和とスカラー倍についてベクトル空間$/\mathbb{R}$

T_pM の基底について：

設定：$(O, U, x) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を fix

Def 2.4.4：各 $i = 1, 2, \cdots, n$ について

$e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{(f \circ x^{-1})(x(p) + te_i) - f(p)}{t}}$$

$f \circ x^{-1} \in C^\infty(U)$ の $x(p)$ での第 i 成分での偏微分

Theorem 2.4.5

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$ は T_pM の基底.

特に $\dim T_pM = n$

M の次元

Def. 2.4.6 :

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \middle| i=1,\cdots,n \right\}$ を

T_pM の (O, U, x) に $\partial\partial$ 座標基底と呼ぶ

基底のとり換えについて

設定: $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ を fix

記号

$$\left(J\tau_{uv}\right)_{u(p)} := \left(\frac{\partial(\tau_{uv})_j}{\partial u_i}(u(p))\right)_{i,j=1,\cdots,n}$$

$u(O\cap O')$ から $v(O\cap O')$ への C^∞-map

τ_{uv} の $u(p)$ におけるヤコビ行列

Theorem 2.4.7:

各 $j=1,\cdots,n$ について

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p = \sum_{i=1}^{n} \left(\left(J\tau_{uv} \right)_{u(p)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial v_i}\right)_p$$

τ_{uv} のヤコビ行列

(O, U, u) の座標基底

(O', V, v) の座標基底

§2.5 : C^∞級写像とその微分

設定 : $M_i := (M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i-mfd $(i=1,2)$

Def 2.5.1 : 連続写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ が C^∞級 (C^∞-map)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall f \in C^\infty(M_2)$,

$$\varphi^*(f) := f \circ \varphi \in C^\infty(M_1)$$

Thm 2.5.2：連続写像 $\varphi : M_1 \to M_2$ について以下は同値：

(i) φ は C^∞ 級

(ii) $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_1$, $\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_2$

$$\varphi_{uv} : u(O \cap \varphi^{-1}(O')) \to V$$

$$u \longmapsto v(\varphi(u^{-1}(u)))$$

が C^∞ 級

微分同相

Def 2.5.3 : $\varphi : M_1 \to M_2$ が微分同相 (diffeomorphism)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ φ は全単射で,

逆写像 $\varphi^{-1} : M_2 \to M_1$ も C^∞ 級

写像の微分

Def 2.5.4 : $\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞級写像

$p \in M_1$ とする.

線型写像 $(d\varphi)_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$

$$g \mapsto g \circ \varphi^* \qquad \left(\begin{array}{l} \varphi^* : C^\infty(M_2) \to C^\infty(M_1) \\ \qquad\qquad f \mapsto f \circ \varphi \end{array} \right)$$

を φ の p における微分という.

(全微分)

Section 2.6：開部分多様体

設定：$M = (M, \mathcal{A}_M)$：n-mfd.

$\Omega \subset M$：open

記号：$\iota : \Omega \hookrightarrow M$：包含写像

Def 2.6.1：

$\mathcal{A}_\Omega := \{ (O, U, u) \in \mathcal{A}_M \mid O \subset \Omega \}$ とおく.

Thm 2.6.2. $(\Omega, \mathcal{A}_\Omega)$ は n-mfd.

開部分多様体 (open submfd) と呼ぶ.

Thm 2.6.3 : $^\forall p \in \Omega$,

$(d\iota)_p : T_p\Omega \to T_pM$

は線型同型.

この意味で "$T_p\Omega = T_pM$" のように書いたりする.

C^∞級関数の制限：

Prop 2.6.4： $C^\infty(M) \to C^\infty(\Omega),\ f \mapsto f|_\Omega$
は well-defined で $\mathbb{R}$ 代数準同型（線型かつ積を保つ）

C^∞級関数の局所性：

Prop 2.6.5： $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: M の開被覆とする．
関数 $f : M \to \mathbb{R}$ について以下は同値

(i) $f \in C^\infty(M)$

(ii) $f|_{\Omega_\lambda} \in C^\infty(\Omega_\lambda)$ $(\forall \lambda \in \Lambda)$

§2.7：Cut-off 関数と C^∞ 級関数の延長

設定：M：n-mfd

Def 2.7.1：各 $f \in C(M)$ について

$$\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$$

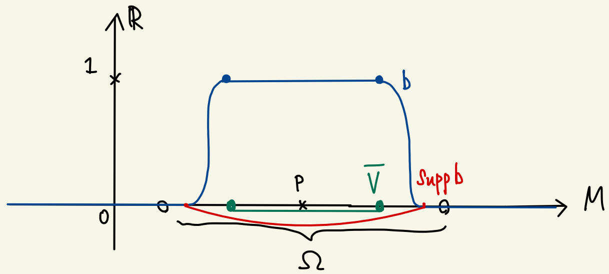
とおく。 ← Mにおける閉包

Def 2.7.2：$p \in M$，Ω：p の開近傍 in M とする。

$b \in C^\infty(M)$ が (p, Ω) の cut-off 関数

$\overset{\longleftrightarrow}{\text{def}}$
$$\begin{cases} 0 \leq b(x) \leq 1 \quad ({}^\forall x \in M), \\ \mathrm{supp}\, b \subset \Omega \quad \text{and} \\ {}^\exists V : p \text{ の開近傍 s.t. } b|_V \equiv 1. \end{cases}$$

($\leadsto$ $V \subset \mathrm{supp}\, b \subset \Omega$)



◎ Cut-off 関数の存在

Thm 2.7.3 :

$^\forall p \in M$, $^\forall \Omega$: p の開近傍 in M,

$^\exists b \in C^\infty(M)$: (p, Ω) の cut-off 関数

◎ C^∞級関数の延長

Thm 2.7.4 : $^\forall p \in M$, $^\forall \Omega$: pの開近傍 in M,

$^\exists V$: pの開近傍 in M

s.t.

$^\forall h \in C^\infty(\Omega)$, $^\exists \tilde{h} \in C^\infty(M)$ s.t. $\tilde{h}|_V = h|_V$

ΩはMの開部分多様体

とみなしている.

Ω上のC^∞級関数hを,

pのまわりの様子を変えずにM上のC^∞級関数$\tilde{h}$に延長できる!

Section 2.8 : 直積多様体

設定 : $M_i = (M_i, \mathcal{A}_i)$: n_i-mfd $(i=1,2)$

以下, $M_1 \times M_2$ を直積位相により位相空間とみなす.

Prop 2.8.1 :

$$\mathcal{A}_0 := \{ (O \times O', U \times V, u \times v) \mid (O, U, u) \in \mathcal{A}_1, (O', V, v) \in \mathcal{A}_2 \}$$

$O \times O' \underset{\text{open}}{\subset} M_1 \times M_2$, $U \times V \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^{n_1+n_2}$

は $M_1 \times M_2$ の (n_1+n_2)次元 C^∞-atlas

また, $(\underbrace{M_1 \times M_2, [\mathcal{A}_0]}_{M_1 \text{ と } M_2 \text{ の直積多様体}})$ は n_1+n_2 次元 C^∞-mfd.

以下，$M_1 \times M_2$ を直積多様体とみなす.

Prop 2.8.2： $p_i : M_1 \times M_2 \to M_i,\ (x_1, x_2) \mapsto x_i$ は C^∞-map $(i = 1, 2)$

Thm 2.8.3： N : C^∞-mfd とし

$\varphi : N \to M_1 \times M_2$ を写像とする.

このとき以下は同値：

(i) φ は C^∞-map

(ii) $p_i \circ \varphi : N \to M_i$ は $i = 1, 2$ で C^∞-map