Section 3 : 多様体上のテンソル束

内容
- 座標基底の双対基底
- テンソル束

当面の目標：多様体上のテンソル束を定義する。

Section 3.1 : 座標基底とその双対

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$ n-mfd

$p \in M$

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$

記号 : T_pM : 接空間 at p

$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_i} \right)_p \right\}_{i=1,\cdots,n}$: 座標基底 of T_pM

$T_p^\vee M := T_pM$ の双対空間 （$(T_pM)^\vee$ と書く代わりに $T_p^\vee M$ と書く）

p における M の余接空間 (cotangent space)

記号

各 $i = 1, \cdots, n$ について

座標関数 $x_i : O \to \mathbb{R}$, $q \mapsto \underbrace{(x(q))_i}_{\text{第 } i \text{ 成分}}$

の p における全微分 $(dx_i)_p : T_pO \to T_{x_i(p)}\mathbb{R}$ を考える.

同一視 $T_pO \cong T_pM$, $T_{x_i(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ より

$\lambda \left(\frac{d}{dt}\right)_{x_i(p)} \leftrightarrow \lambda$

$(dx_i)_p : T_pM \to \mathbb{R}$ i.e. $(dx_i)_p \in T_p^{\vee}M$ とみなす.

Thm 3.1.1 : $i, j \in \{1, \dots, n\}$ について

$$(du_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p\right) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

特に $\{(du_i)_p\}_{i=1,\dots,n}$ は $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p\right\}_{i=1,\dots,p}$ の双対基底

Proof

i, j を fix.

$(du_i)_p : T_pO \to T_{u_i(p)}\mathbb{R}$ とみなす.

$\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p \in T_pO$ とみなす. $^\forall f \in C^\infty(\mathbb{R})$ をとる.

示 $$\left((du_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial u_j}\right)_p\right)\right)(f) = \begin{cases} \frac{df}{dt}(u_i(p)) & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\text{左辺} = \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (x_i^* f)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p (f \circ x_i)$$

$e_1, \cdots, e_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底

$$= \lim_{t \to 0} \frac{((f \circ x_i) \circ x^{-1})(x(p) + t e_j) - f(x_i(p))}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{f\left((x(p) + t e_j) \text{ の第 } i \text{ 成分}\right) - f(x_i(p))}{t}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(x_i(p) + t) - f(x_i(p))}{t} & (i = j) \\[2ex] \displaystyle\lim_{t \to 0} \frac{f(x_i(p)) - f(x_i(p))}{t} & (i \neq j) \end{cases} = \text{右辺}$$

∎

Section 3.2 : テンソル束

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

$s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 : 各 $p \in M$ について

T_pM : 接空間 at p (n-dim'l vector sp$/\mathbb{R}$)

$T_p^\vee M$: T_pM の双対空間

$$T_p^{(s,t)}M := \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{s} \otimes \underbrace{T_p^\vee M \otimes \cdots \otimes T_p^\vee M}_{t}$$

Remark 3.2.1 :

$$(s,\tau) = (0,0) \; : \quad T_p^{(0,0)}M \cong \mathbb{R}$$

$$(s,\tau) = (1,0) \; : \quad T_p^{(1,0)}M \cong T_pM$$

$$(s,\tau) = (0,1) \; : \quad T_p^{(0,1)}M \cong T_p^{\vee}M$$

$$(s,\tau) = (1,1) \; : \quad T_p^{(1,1)}M \cong L(T_pM, T_pM) \;\; (= \mathrm{End}(T_pM) \text{ と書く})$$

$$\cong L(T_p^{\vee}M, T_p^{\vee}M) \;\; (= \mathrm{End}(T_p^{\vee}M))$$

$$(s,\tau) = (0,2) \; : \quad T_p^{(0,2)}M \cong ML(\{T_pV, T_pV\}, \mathbb{R})$$

(T_pV 上の双線型形式)

Def 3.2.2 ((s,t)-テンソル束):

集合 $T^{(s,t)}M := \coprod_{p\in M} T_p^{(s,t)}M$

$:= \{(p,\alpha) \mid p\in M,\ \alpha\in T_p^{(s,t)}M\}$

を M 上の (s,t)-テンソル束と呼ぶ.

これからやる事: テンソル束 $T^{(s,t)}M$ に

① 位相を定める.

② 多様体構造を定める.

記号： $[n] := \{1, \cdots, n\}$ とおく.

$[n]^s := \{ (i_k)_{k=1,\cdots,s} \mid i_k \in [n] \}$

$[n]^t := \{ (j_l)_{l=1,\cdots,t} \mid j_k \in [n] \}$

Remark 3.2.3： $(O, U, u) \in \mathcal{A}$, $p \in O$ とする.

このとき

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_s}}\right)_p \otimes (du_{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (du_{j_t})_p \right\}_{((i_k)_k, (j_l)_l) \in [n]^s \times [n]^t}$$

は $T_p^{(s,t)} M$ の基底

(cf. Thm 1.4.6, Thm 3.1.1)

記号：

$$\mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t} := \left\{ \left(\underbrace{a_{i_1,\cdots,i_s,j_1,\cdots,j_t}}_{\in\,\mathbb{R}} \right)_{((i_k)_k,(j_\ell)_\ell) \in [n]^s \times [n]^t} \right\}$$

$\left(\#([n]^s \times [n]^t) = n^{s+t} \text{ 次元ユークリッド空間} \right)$

Def 3.2.4: 各 $(O, U, u) \in A$ について

$$\iota_u : O \times \mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t} \to T^{(s,t)}M$$

$$(p, (a_{i_1 \cdots i_s j_1 \cdots j_t})_{((i_k)_k, (j_l)_l)}) \mapsto$$

$$\left(p, \underbrace{\sum_{((i_k)_k, (j_l)_l) \in [n]^s \times [n]^t} a_{i_1 \cdots i_s j_1 \cdots j_t} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_s}}\right)_p \otimes (du_{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (du_{j_t})_p}_{\in T_p^{(s,t)}M}\right)$$

とおく

Prop 3.2.5 : 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

(1) τ_u は単射

(2) τ_u の像 $= \bigsqcup_{p \in O} T_p^{(s,\tau)} M \subset T^{(s,\tau)} M$

$$\left(\begin{array}{c} \bigsqcup_{p \in O} T_p^{(s,\tau)} M \\ \cong \\ \bigsqcup_{p \in O} T_p^{(s,\tau)} O \\ \| \\ T^{(s,\tau)} O \end{array} \right)$$

後で使う

Lem 3.2.6 $(O, U, u), (O', V, v) \in A$ について

$$\iota_v^{-1} \circ \iota_u : (O \cap O') \times \mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t} \longrightarrow (O \cap O') \times \mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t}$$

は diffeo

($O \cap O'$ は M の open submfd とみなし、

$(O \cap O')$ と $\mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t}$ の直積多様体を考えている)

◎ テンソル束の位相.

Thm 3.2.7 : $T^{(s,t)}M$ 上の位相 $\mathcal{O}$ であって,
以下を満たすものが唯一つ存在する.

◎ 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

$\tau_u : O \times \mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t} \to (T^{(s,t)}M, \mathcal{O})$

は連続かつ開 (i.e. 像が開 in $T^{(s,t)}M$ で, τ_u は中への同相)

O は M の相対位相
$\mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t}$ はユークリッド位相
全体は直積位相.

Hint : Lem 3.2.6

以下, Thm 3.2.7 の意味で $T^{(s,r)}M$ を位相空間とみなす.

Prop 3.2.8 : $T^{(s,r)}M$ はハウスドルフかつ第二可算

Prop 3.2.9 : $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ のとき

$$\left(T^{(s,r)}\Omega := \coprod_{p\in\Omega} T_p^{(s,r)}\Omega \cong\right) \coprod_{p\in\Omega} T_p^{(s,r)}M \underset{\text{open}}{\subset} T^{(s,r)}M$$

◎テンソル束の多様体構造

Thm 3.2.10: $T^{(s,t)}M$ の $(n+n^{s+t})$ 次元極大 C^∞ atlas $\tilde{\mathcal{A}}$ であって

以下を満たすものが唯一つ存在する:

◎ 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

$T^{(s,t)}O$ を $(T^{(s,t)}M, \tilde{\mathcal{A}})$ の開部分多様体

とみなしたとき、

$$l_u : O \times \mathbb{R}^{[n]^s \times [n]^t} \to T^{(s,t)}O \text{ は微分同相}.$$

O は M の開部分多様体

全体は積多様体とみなす.

Hint: Lem 3.2.6

以下 $T^{(s,t)}M$ を Thm 3.2.10 の意味で

C^∞-mfd (次元は $n+n^{s+t}$)

とみなす.

Prop 3.2.11: $\pi : T^{(s,t)}M \to M$, $(p, v) \mapsto p$ は C^∞ 級

└

Rem 3.2.12: $(T^{(s,t)}M, M, \pi)$ は C^∞-ベクトル束

(詳細略)

└

Def 3.2.13 :

M の接束 (tangent bundle) :

$$TM := T^{(1,0)}M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^{(1,0)}M \cong \bigsqcup_{p\in M} T_pM$$

M の余接束 (cotangent bundle)

$$T^\vee M := T^{(0,1)}M = \bigsqcup_{p\in M} T_p^{(0,1)}M \cong \bigsqcup_{p\in M} T_p^\vee M$$

Ex 3.2.14 : $n \geq 1$ とし

n-mfd $S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$ を考える.

n - sphere

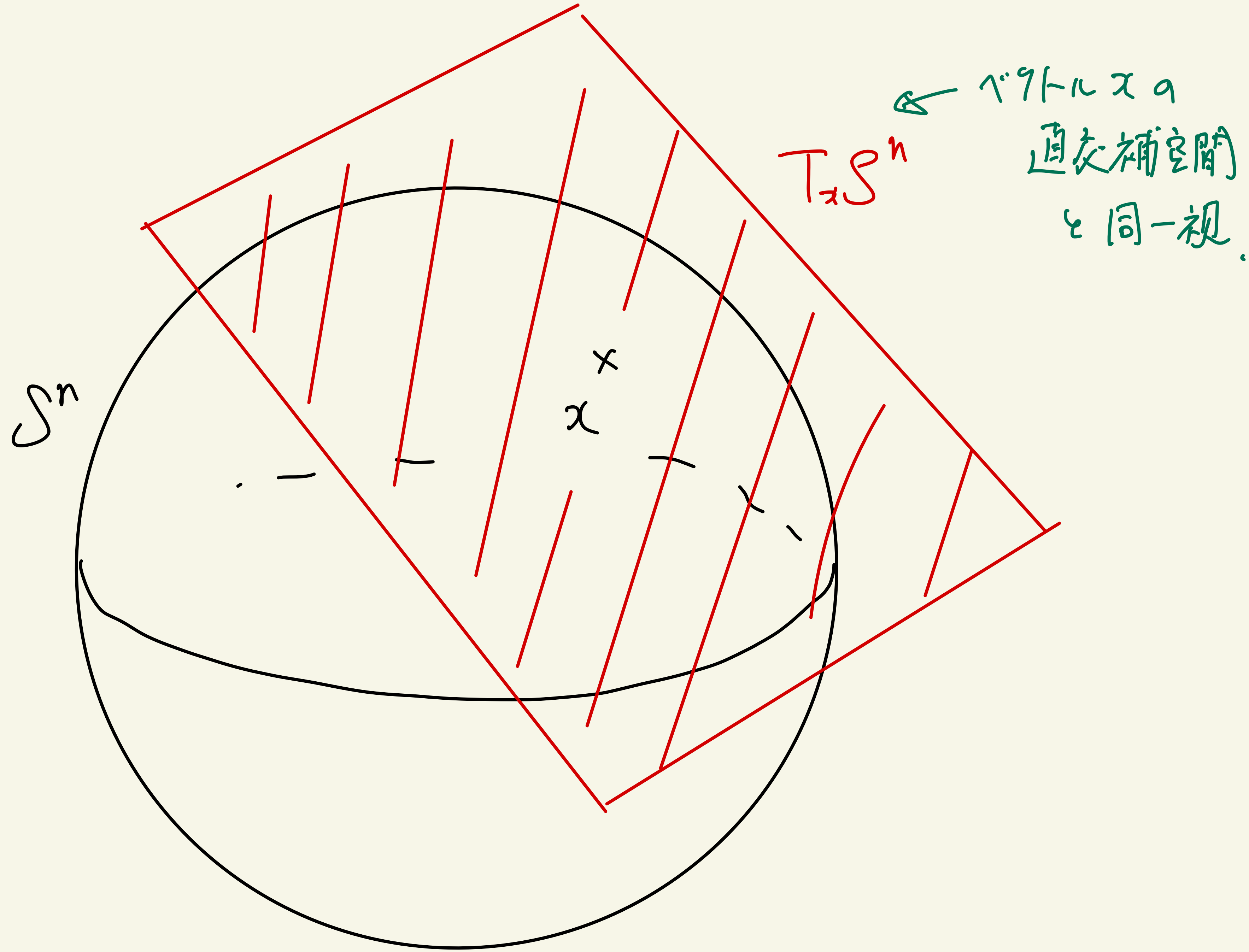
このとき $TS^n \cong \{ (x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid \underbrace{\langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}}_{\mathbb{R}^{n+1}\text{上の標準内積}} = 0 \}$

$(\pi(x, v) = x)$

と考えてよい.

(Hint : 各 $x \in S^n$ について

$\underbrace{T_x S^n \cong \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, v \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = 0 \}}_{\text{自然な同一視}}$)



S^n
x
$T_x S^n$
ベクトルxの
直交補空間
と同一視.