Section 4 : テンソル場（解析的定義）

- テンソル場の解析的定義
- テンソル場の例

当面の目標：テンソル場を解析，代数の両面から定義する

Section 4.1: テンソル場 (解析的定義)

設定: $M = (M, A)$: n-mfd

$s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号: $T^{(s,t)}M := \bigsqcup_{p \in M} T_p^{(s,t)}M$

↑ Thm 3.2.10 の意味で C^∞-mfd とみなす.

$\pi : T^{(s,t)}M \to M$, $(p, \alpha) \mapsto p$: C^∞級

(Prop 3.2.11)

Def 4.1.1 :

写像 $\sigma : M \to T^{(s,r)}M$ が

M 上の (s,r)-テンソル場

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (1) $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$

かつ

(2) σ は C^∞ 級写像

条件"(1) $\pi\circ\sigma = \mathrm{id}_M$" について

各 $p\in M$ について

$$\sigma(p) = (\overset{(\pi\circ\sigma)(p)}{p}, \underbrace{\boxed{}}_{\in\, T_p^{(s,\tau)}M})$$ の形になるという意味

(つまり σ は

各 $p\in M$ について $T_p^{(s,\tau)}M$ の元を指定している)

記号：各 $p\in M$ について $\sigma(p) = (p, \underbrace{\sigma_p}_{\in\, T_p^{(s,\tau)}M})$ とおく

条件 "(2) : σ は C^∞ 級" について

Prop 4.1.2 : 写像 $\sigma : M \to T^{(s,t)}M$ で "(1) : $\pi \circ \sigma = id_M$" を満たすとする。

各 $p \in M$ について $\sigma(p) = (p, \sigma_p)$ と書く。

このとき 以下は同値

(i) σ は C^∞ 級

$\Updownarrow$

(ii) $^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_M$, 各 $p \in O$ について

$$\sigma_p = \sum_{((i_k)_k, (j_l)_l) \in [n]^s \times [n]^t} \underbrace{a_{i_1 \cdots i_s j_1 \cdots j_t}(p)}_{\in \mathbb{R}} \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_1}}\right)_p \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial u_{i_s}}\right)_p \otimes (du_{j_1})_p \otimes \cdots \otimes (du_{j_t})_p$$

とおくと、

$^\forall ((i_k)_k, (j_l)_l) \in [n]^s \times [n]^t$, $O \to \mathbb{R}$, $p \mapsto a_{i_1 \cdots i_s j_1 \cdots j_t}(p)$ は C^∞ 級関数 on O

Section 4.2 : テンソル場の例 :

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

$s, t \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 4.2.1 :

$(1,0)$-テンソル場をベクトル場

$(0,1)$-テンソル場を一次微分形式 (1-form)

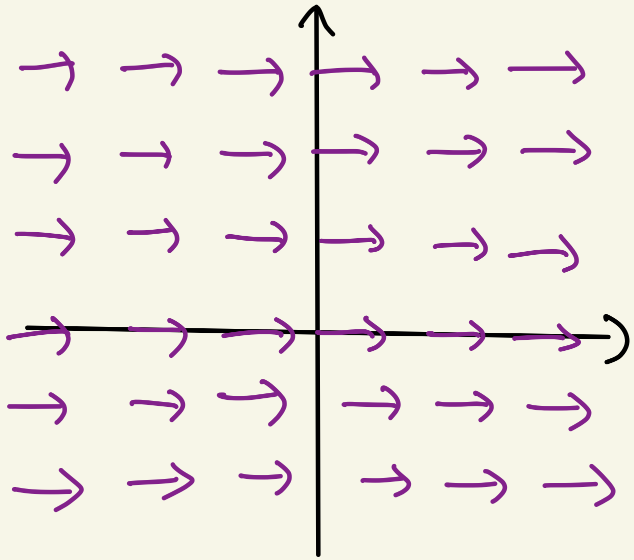
と呼ぶ.

Ex 4.2.2 :

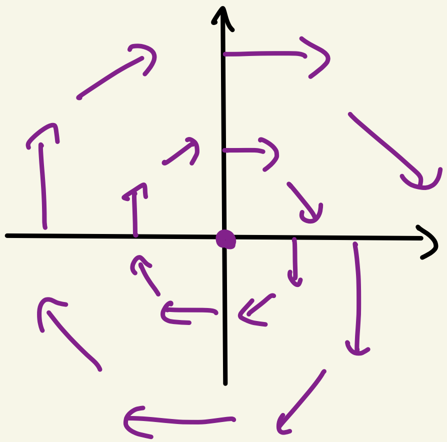
$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ を 2次元 C^∞-mfd とみなす

ベクトル場の例

$$\mathbb{R}^2 \to T\mathbb{R}^2$$
$$p \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p$$



$$\mathbb{R}^2 \to T\mathbb{R}^2$$
$$p \mapsto p_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - p_1\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p$$
$$\overset{\shortparallel}{(p_1, p_2)}$$

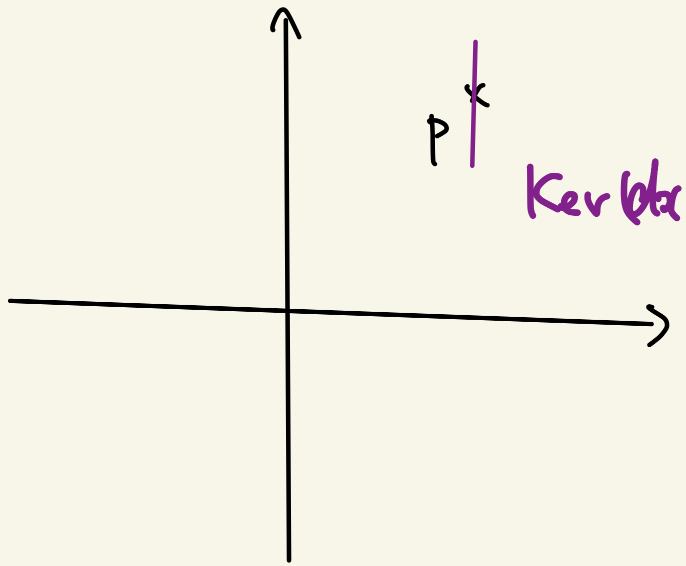


1-form の例

$$\mathbb{R}^2 \to T^\vee \mathbb{R}^2$$

$$p \mapsto (dx)_p$$

絵に描くのは難しい…



$\mathrm{Ker}(dx)_p = \mathbb{R}\text{-span}\{(\frac{\partial}{\partial y})_p\}$

Ex 4.2.3 :

$$S^2 := \{ x \in S^2 \mid \sum x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$$

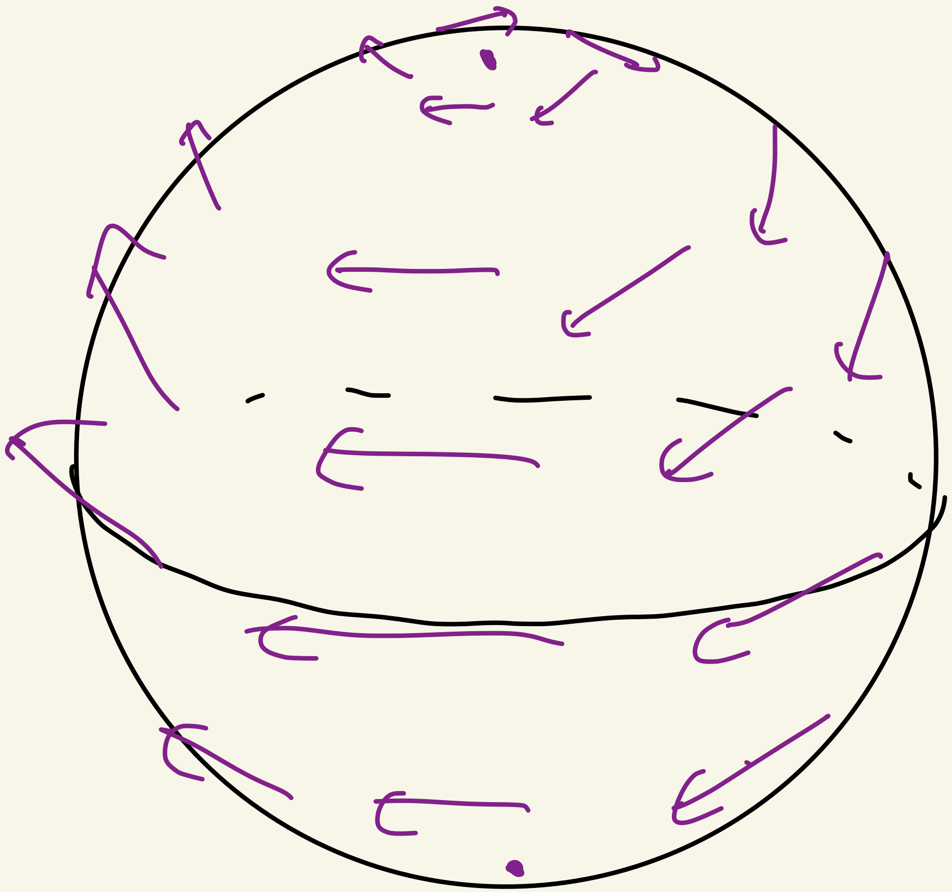
各 $p \in S^2$ について

$$T_p S^2 \cong \left\{ \sum_{i=1}^{3} a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \in T_p\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{3} p_i a_i = 0 \right\}$$

とみなす.

ベクトル場の例

$$S^2 \to TS^2, \quad p \mapsto p_2\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p - p_1\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p$$



Def 4.2.4: $(0,2)$-テンソル $g : M \to T^{(0,2)}M$ が

M 上のリーマン計量

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall p \in M,$

$g_p \in T_p^{(0,2)}M \cong \{T_pM$ 上の双線型形式$\}$

が T_pM 上の内積（対称、正定値）

Ex 4.2.5

$\mathbb{R}^n = \{ x = (x_1 \cdots x_n) \mid x_i \in \mathbb{R} \}$ を n次元 C^∞-mfd とみなす.

(0,2)-テンソル場

$g : \mathbb{R}^n \to T^{(0,2)}\mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ のリーマン計量を定める.

$$p \longmapsto \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (dx_i)_p \otimes (dx_i)_p}_{= g_p}$$

実際:
$$g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_p\right) = \sum_i \left((dx_i)_p \otimes (dx_i)_p\right)\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_p\right)$$
$$= \sum_i \left((dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\right)\right) \cdot \left((dx_i)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\right)_p\right)\right)$$
$$= \begin{cases} 1 & (k = l) \\ 0 & (k \neq l) \end{cases}$$

となるので g_p は $T_p\mathbb{R}^n$ 上に $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}_{i=1\cdots n}$ が正規直交基底となる

ような内積を定めてる.

この g を $\mathbb{R}^n$ のユークリッド計量とよぶ.

Ex 4.2.6 : $S^2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum x_i^2 = 1 \} \subset \mathbb{R}^3$

g を $\mathbb{R}^3$ のユークリッド計量とする.

各 $p \in S^2$ について $T_pS^2 \subset T_p\mathbb{R}^3$ とみなし

$$g_p|_{T_pS^2} : T_pS^2 \times T_pS^2 \to \mathbb{R}$$ を考えると
$$(v, w) \mapsto g_p(v, w)$$

これは T_pS^2 上の内積を定める.

ここで

$$g_{S^2} : S^2 \to T^{(0,2)}S^2, \quad p \mapsto g_p\big|_{T_pS^2}$$

は S^2 上のリーマン計量となる.

（S^2 上の標準計量とよぶ）

Ex 4.2.7 :

$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1 \}$: 2次元 C^∞-mfd

($\mathbb{R}^2$ の open submfd)

$$g : D \to T^{(0,2)} D, \quad p \mapsto \frac{1}{(1-(p_1^2+p_2^2))^2} (dx \otimes dx + dy \otimes dy)$$

は D 上のリーマン計量

これは 双曲計量 (断面曲率 $\equiv -1$) の例.

(詳細略)

Def 4.2.8：(概複素構造)（講義では省略）

$(1,1)$-テンソル $J : M \to T^{(1,1)}M$ が

概複素構造

(almost complex structure)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\forall}p \in M$,

$$J_p \in T_p^{(1,1)}M \cong \mathcal{L}(T_pM, T_pM)$$

が $J_p \circ J_p = -\mathrm{id}_{T_pM}$

Prop 4.2.9：奇数次元の空でない多様体は概複素構造を持たない．

Ex 4.2.10.

$$J : \mathbb{R}^2 \to T^{(1,1)}\mathbb{R},\quad p \mapsto \overbrace{\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \otimes (dx)_p - \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p \otimes (dy)_p}^{J_p}$$

は $\mathbb{R}^2$ 上の概複素構造

$$\left(J_p : T_p\mathbb{R}^2 \to T_p\mathbb{R}^2,\quad a\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + b\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \mapsto -b\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p + a\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p \right)$$

Ex 4.2.11:

以下のFactを用いてS^2上の概複素構造を定めよう.

Fact 4.2.12: 各$p \in S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_i x_i^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$について

3次直交行列J_pであって

$$\begin{cases} J_p \cdot p = p \\ J_p^2 \cdot v = -v \quad (\forall v \in \mathbb{R}^3 \text{ with } p \perp v) \\ \det J_p = 1 \end{cases}$$

となるものが一意に存在する.

更に $S^2 \to M(3;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^9$, $p \mapsto J_p$ はC^∞級

各 $p \in S^2$ について

$$T_p S^2 \subset \mathbb{R}^3$$ とみなし

$$\begin{array}{c} T_p S^2 \\ \shortparallel \\ \{ (a_1, a_2, a_3) \mid p \perp a \} \end{array}$$

$$J : S^2 \to T^{(1,1)} S^2, \quad p \mapsto J_p \big|_{T_p S^2} \in \underset{\substack{\cong \\ T^{(1,1)}_p S^2}}{\mathcal{L}(T_p S^2, T_p S^2)}$$

とおくと J は S^2 上の概複素構造を定める.