§5: $\mathbb{R}$代数の加群と多重加群準同型

内容

- 加群
- 加群準同型
- 多重加群準同型

準備

当面の目標: テンソル場を解析, 代数の両面から定義する

§5.1：加群

設定：$A = (A, \cdot)$：結合的単位的可換$\mathbb{R}$代数

Def 5.1.1：V：実ベクトル空間に以下の条件(i),(ii)を満たす双線型写像

$$A \times V \to V \quad (a, v) \mapsto a \cdot v$$

が定まっているとき，VをA加群（A-mod）と呼ぶ．

"module"の略

(i) $(a \cdot b) v = a \cdot (b \cdot v) \quad (\forall a, b \in A, \forall v \in V)$

(ii) $1_A \cdot v = v \quad (\forall v \in V)$

Ex 5.1.2 : M : n-mfd とする.

(1) $C^\infty(M)$ は 結合的単位的可換 $\mathbb{R}$ 代数

(2) $C^\infty(M)$ 自身を "左から $C^\infty(M)$ の元をかける" 操作により $C^\infty(M)$-mod とみなせる.

(3) $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) := \{ X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) \mid$ 線型 $\}$ とおく (ベクトル空間)

各 $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ に対して

$f \cdot X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $h \mapsto f \cdot (Xh)$ とおくと

$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ は $C^\infty(M)$-mod.

Def 5.1.3 (部分加群)

V: A-mod とする.

線型部分空間 W of V が V の部分 A 加群 (sub A-mod)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ W は A 倍で閉じる

(i.e. $\forall a \in A$, $\forall w \in W$, $a \cdot w \in W$)

Prop 5.1.4 sub A-mod 自身も A-mod.

§5.2. 加群準同型

設定：A ：結合的単位的可換 $\mathbb{R}$ 代数

V, W : A-mods

Def 5.2.1: 線型写像 $\phi : V \to W$ が

A 加群準同型 (A-hom.)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ ${}^\forall a \in A,\ {}^\forall v \in V$

$$f(a \cdot v) = a \cdot f(v)$$

また: $\mathrm{Hom}_A(V, W) := \{ \phi : V \to W \mid A\text{-hom} \}$

とおく。

Prop 5.2.2 : $\mathrm{Hom}_A(V, W)$ は以下の意味で A-mod.

(1) 和 : $\phi_1 + \phi_2 : V \to W,\ v \mapsto \phi_1(v) + \phi_2(v)$

(2) スカラー倍 : $\lambda\phi : V \to W,\ v \mapsto \lambda(\phi(v))$

(3) A 倍 : $a\phi : V \to W,\ v \mapsto a \cdot (\phi(v))$

Ex 5.2.3: M : n-mfd とする.

各 $f \in C^\infty(M)$ について

$$R_f : C^\infty(M) \to C^\infty(M),\ h \mapsto h \cdot f$$

は $C^\infty(M)$-hom.

逆に 任意の $C^\infty(M)$-hom $\phi : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$

について $\exists! f \in C^\infty(M)$ s.t. $\phi = R_f$.

(Hint: $f := \phi(1_M)$ とおく)

特に

この対応は $C^\infty(M)$ から $\mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(C^\infty(M), C^\infty(M))$

への $C^\infty(M)$ 加群同型を与える.

(一般に 結合的単位的可換 $\mathbb{R}$ 代数 A について

$$A \underset{\text{as } A\text{-mod}}{\simeq} \mathrm{Hom}_A(A, A)$$)

Def 5.2.4 全単射 A-hom を

A 加群同型 (A-isom) とよぶ

Prop 5.2.5 : A-isom $\phi : V \to W$ について

逆写像 $\phi^{-1} . W \to V$ も A-hom

(特に A-isom)

§5.3：多重$\mathbb{R}$代数加群準同型

設定：

- A：結合的単位的可換$\mathbb{R}$代数
- I：有限集合
- $(V_i)_{i\in I}$：A加群の族
- W：A加群

Def 5.3.1: 写像 $\phi : \prod_{i\in I} V_i \to W$ が

多重 A 加群準同型 (multi-A-hom)

$\overset{\text{def}}{\iff}$ "各成分ごとに A-hom"

つまり

$\forall i_0 \in I,\ \forall (v_i)_{i\in I\setminus\{i_0\}} \in \prod_{i\in I\setminus\{i_0\}} V_i$

$$\tilde{\phi} : V_{i_0} \to W,\quad v_{i_0} \mapsto \phi((v_i)_{i\in I})$$

が A-hom

また

$$MH_A(\{V_i\}_{i\in I}, W) := \left\{ \phi : \prod_{i\in I} V_i \to W \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{multi}\\ \text{-A-hom}\end{array} \right\}$$

とおく.

Prop 5.3.2: $MH_A(\{V_i\}_{i\in I}, W)$ は 以下の意味で A-mod.

(1) 和: $\phi_1+\phi_2 : \prod_i V_i \to W$, $v \mapsto \phi_1(v)+\phi_2(v)$

(2) スカラー倍: $\lambda\phi : \prod_i V_i \to W$, $v \mapsto \lambda\cdot(\phi(v))$

(3) A倍: $a\cdot\phi : \prod_i V_i \to W$, $v \mapsto a\cdot(\phi(v))$

Remark 5.13: $I = \emptyset$ のときは $\prod_{i \in I} V_i = \{\emptyset\}$ とみなし
(一点集合)

$$\mathrm{MH}_A(\{V_i\}_{i \in I}, W)$$
$$\|$$
$$\mathrm{Map}(\{\emptyset\}, W) := \{f : \{\emptyset\} \to W \mid 写像\}$$
$$\cong W$$
とみなす.