Section 6: テンソル場のなす加群

- テンソル場のなす加群
- テンソル場の制限，局所性，延長

準備

当面の目標: テンソル場を解析，代数の両面から定義する

Section 6.1 : テンソル場のなす加群

設定: M : n 次元 C^∞-mfd.

└ $s, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 $C^\infty(M) := \{ f : M \to \mathbb{R} \mid C^\infty 級関数 \}$

(結合的単位的可換 $\mathbb{R}$ 代数)

Def 6.1.1: $\Gamma(T^{(s,t)}M) := \{ \sigma : M \to T^{(s,t)}M \mid (s,t)$-テンソル場 $\}$

(i.e. C^∞級 かつ $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$)

とおく.

記号: 各 $\sigma \in \Gamma(T^{(s,t)}M)$, 各 $p \in M$ について

$$\sigma(p) = (p, \sigma_p) \quad \text{とおく.}$$

$$\sigma_p \in T_p^{(s,t)}M = \underbrace{T_pM \otimes \cdots \otimes T_pM}_{s} \otimes \underbrace{T_p^{*}M \otimes \cdots \otimes T_p^{*}M}_{t}$$

Thm 6.1.2: $\Gamma(T^{(s,r)}M)$ は以下の和, スカラー倍, 関数倍について $C^\infty(M)$ 加群をなす.

和 : $\sigma + \tau : M \to T^{(s,r)}M,\ p \mapsto (p, \sigma_p + \tau_p)$

$(\sigma, \tau \in \Gamma(T^{(s,r)}M))$

$T_p^{(s,r)}M$ の和

スカラー倍 : $\lambda\sigma : M \to T^{(s,r)}M,\ p \mapsto (p, \lambda\sigma_p)$

$(\lambda \in \mathbb{R},\ \sigma \in \Gamma(T^{(s,r)}M))$

$T_p^{(s,r)}M$ のスカラー倍

関数倍 : $f\sigma : M \to T^{(s,r)}M,\ p \mapsto (p, f(p)\sigma_p)$

$(f \in C^\infty(M),\ \sigma \in \Gamma(T^{(s,r)}M))$

$T_p^{(s,r)}M$ のスカラー倍

注意：Thm 6.1.2 の証明において、まず $\Gamma(T^{(s,t)}M)$ がベクトル空間であることを示す必要がある。

Prop 1.1.1 を使いたくなる場面ではあるが、

$T^{(s,t)}M$ はベクトル空間ではないので直接は使えない。

(各 $p \in M$ について $T^{(s,t)}_p M$ はベクトル空間)

Section 6.2 : テンソル場の制限, 局所性, 延長

設定 : M : n 次元 C^∞-mfd.

$s, r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Recall : $\Omega \subset M$: open のとき

$$T^{(s,r)}\Omega := \coprod_{p\in\Omega} T_p^{(s,r)}\Omega \cong \coprod_{p\in\Omega} T_p^{(s,r)}M \underset{\text{open}}{\subset} T^{(s,r)}M$$

を開部分多様体とみなす.

Prop 6.2.1 : $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

$$\Gamma(T^{(s,r)}M) \to \Gamma(T^{(s,r)}\Omega)$$ は well-defined で線型.

$$\sigma \mapsto \sigma|_{\Omega}$$

また以下の意味で関数倍を保つ

$${}^{\forall}\sigma \in \Gamma(T^{(s,r)}M),\ {}^{\forall}f \in C^{\infty}(M),$$

$$(f\sigma)|_{\Omega} = \underbrace{(f|_{\Omega})}_{C^{\infty}(\Omega)}(\sigma|_{\Omega})$$

Prop 6.2.2 (テンソル場の局所性) $\{\Omega_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M の開被覆とする.

写像 $\sigma : M \to T^{(s,t)}M$ について以下は同値:

(i) $\sigma \in \Gamma(T^{(s,t)}M)$

(ii) 各 $\lambda \in \Lambda$ について

$\sigma(\Omega_\lambda) \subset T^{(s,t)}\Omega_\lambda$ であり,

$\sigma|_{\Omega_\lambda} \in \Gamma(T^{(s,t)}\Omega_\lambda)$

Thm 6.2.3 : (テンソル場の延長)

$p \in \Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

このとき $p \in {}^{\exists}V \underset{\text{open}}{\subset} \Omega$ s.t.

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^{\forall}\sigma \in \Gamma(T^{(s,r)}\Omega), \\ {}^{\exists}\tilde{\sigma} \in \Gamma(T^{(s,r)}M) \text{ s.t. } \sigma|_V = \tilde{\sigma}|_V \end{array} \right.$$

Hint : Thm 2.7.3