Section 7: テンソル場(代数的定義)

内容

- ベクトル場の代数的定義
- 1-form の代数的定義
- テンソル場の代数的定義

当面の目標: テンソル場を解析，代数の両面から定義する

Section 7.1：ベクトル場（代数的定義）

設定：M：n次元 C^∞-mfd.

記号：$\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M)) := \{X : C^\infty(M) \to C^\infty(M) \mid 線型\}$

（$C^\infty(M)$ 加群）

（cf. Ex 5.1.2）

Def 7.1.1 :

$$\mathfrak{X}(M) := \left\{ X \in \mathrm{End}(C^\infty(M)) \;\middle|\; {}^\forall f, g \in C^\infty(M),\ \underbrace{X(f \cdot g) = (Xf)\cdot g + f \cdot (Xg)}_{\text{場のライプニッツ則}} \right\}$$

とおく.

$\mathfrak{X}(M)$ の元を M 上のベクトル場とよぶ.

Prop 7.1.2 : $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(C^\infty(M))$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

特に $\mathfrak{X}(M)$ は $C^\infty(M)$ 加群 .

◎ $\mathfrak{X}(M)$ vs $\Gamma(T^{(1,0)}M)$

Prop 7.1.3 : 各 $X \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ について

$$X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R},\ f \mapsto (Xf)(p)$$

とおくと $X_p \in T_pM$.

Thm 7.1.4: $\Gamma(T^{(1,0)}M)$ と $\mathfrak{X}(M)$ は以下の対応により $C^\infty(M)$ 加群同型

$$\Gamma(T^{(1,0)}M) \to \mathfrak{X}(M), \quad \sigma \mapsto X_\sigma : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X_\sigma f : M \to \mathbb{R}$$
$$p \mapsto \underset{\underset{T_pM}{\cap}}{\sigma_p}(f)$$

$$\mathfrak{X}(M) \to \Gamma(T^{(1,0)}M), \quad X \mapsto \sigma^X : M \to T^{(1,0)}M$$
$$p \mapsto (p, X_p)$$

ただし $X_p : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$
$$f \mapsto (Xf)(p)$$

以降 $\Gamma(T^{(1,0)}M)$ と $\mathfrak{X}(M)$ を同一視する.

特にベクトル場 X on M に対して

- $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$, $\exists ! a_1 \cdots a_n \in C^\infty(O)$

  s.t. $\displaystyle X_q = \sum_{i=1}^{n} a_i(q)\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_q \quad (\forall q \in O)$

- $\forall f \in C^\infty(M)$, $Xf \in C^\infty(M)$

- $U \underset{\text{open}}{\subset} M$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ について $X|_U \in \mathfrak{X}(M)$

  (Prop 6.1.2)

などの書き方をする.

Section 7.2： 一次微分形式（代数的定義）

設定： M : n 次元 C^∞-mfd.

記号： $\mathfrak{X}(M) = \{$ ベクトル場 on $M \}$

$\quad\quad\ \ \rotatebox{90}{$\subseteq$}$ ($C^\infty(M)$-加群)

$\quad\quad\ \Gamma(T^{(1,0)}M)$

Def 7.2.1 :

$$\mathcal{A}^1(M) := \mathrm{Hom}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M))$$

とおく.

$\mathcal{A}^1(M)$ の元を一次微分形式 (1-form) とよぶ

Rem : $\mathcal{A}^1(M)$ は Prop 5.2.2 の意味で $C^\infty(M)$ 加群

◎ $\Omega^1(M)$ vs $\Gamma(T^{(0,1)}M)$

ポイント：各 $\omega \in \Omega^1(M)$, $p \in M$ に対して

$\omega_p \in T_p^{(0,1)}M \, (= T_p^\vee M)$ を定めたい.

難点, 何らかの意味で $v \in T_pM$ を

$\omega : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$ に代入したい、

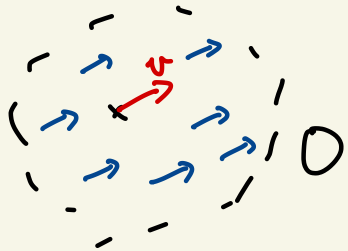
どうやって？

Prop 7.2.2 : 各 $v \in T_pM$ について

$\exists X \in \mathfrak{X}(M)$ s.t. $X_p = v$

Hint : $X \in \Gamma(T^{(1,0)}M) \ (= \mathfrak{X}(M))$ を

① まず local に v を コピー & ペーストして作る.



② p のまわりの様子を保って全体に延長する.

各 $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$ について

$\omega_p : T_pM \to \mathbb{R}$, $v \mapsto (\omega(X))(p)$ とおく

($\text{ただし } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ with } X_p = v$)

<u>Q</u> これは well-defined? (X のとり方によらない?)

<u>A</u> well-defined!

Thm 7.2.3: $\omega \in A^1(M)$ とする.

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ が $X_p = Y_p$ のとき

$$(\omega(X))(p) = (\omega(Y))(p)$$

($(\omega(X))(p)$ は "X_p のみ" によって決まる.)

Thm 7.2.3 の証明：

$\omega \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ を fix.

2段階に分ける：

① local

② pointwise

① について

まず次を示す

Lemma 7.2.4 :

$Z \in \mathfrak{X}(M)$ が

"$p \in {}^{\exists} U \underset{\text{open}}{\subset} M$ s.t. $Z|_U = 0$" を満たすとする.

(Z は p のまわりでべったりゼロ)

このとき $(\omega(Z))|_U = 0$

Pf of Lem 7.2.4: Z, U を fix.

$q \in U$ を fix

㊬ $(\omega(Z))(q) = 0$

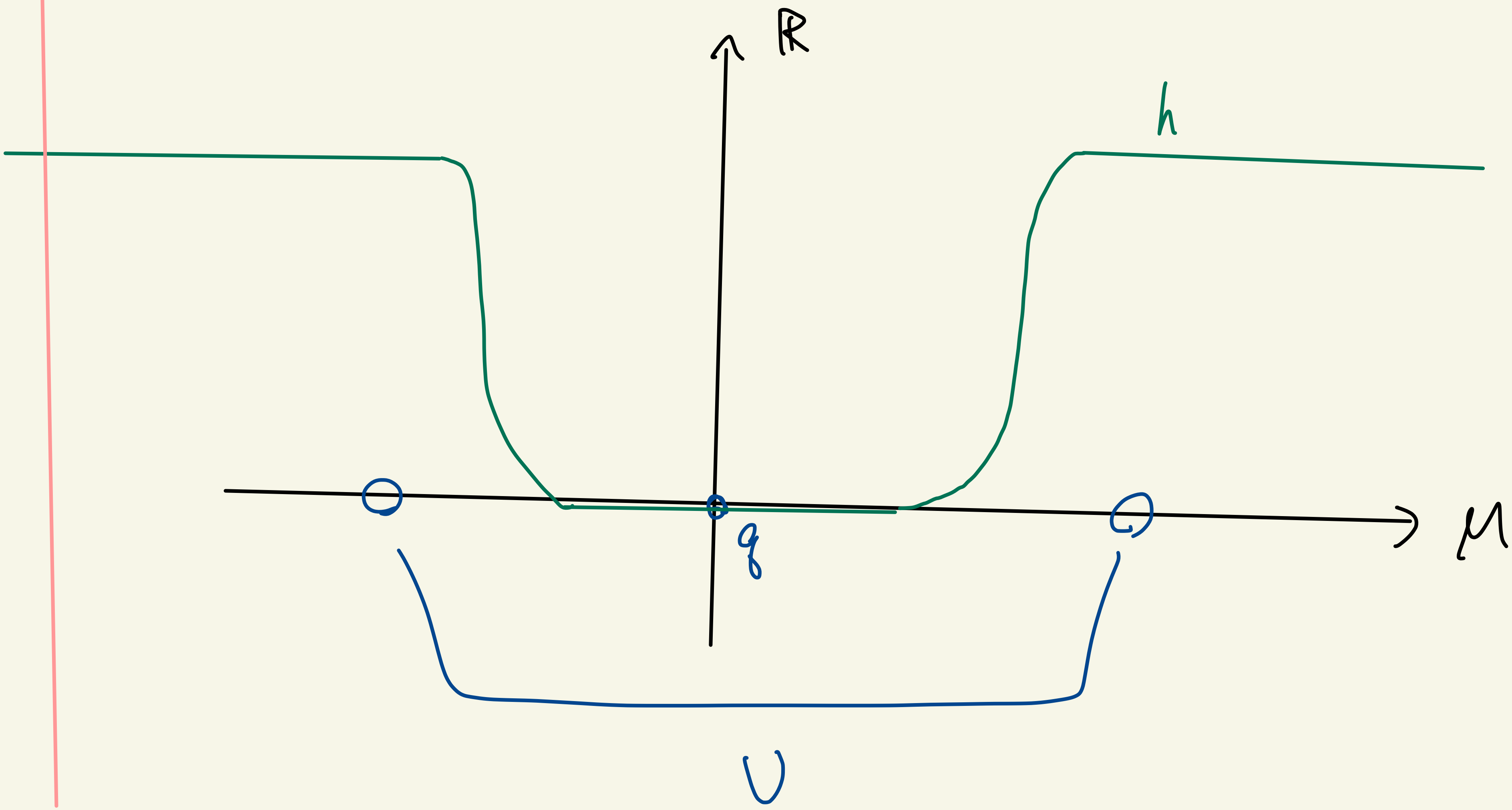
(q, U) の cut-off 関数 $b \in C^\infty(M)$ を fix

(cf. Def 2.7.2)

$1_M : M \to \mathbb{R},\ x \mapsto 1$ とおく

($1_M \in C^\infty(M)$: 定数関数)

$h := 1_M - b \in C^\infty(M)$ s.t.



このとき $hZ = Z$ となる.

∵ $x \in M$ を fix

示 $(hZ)_x = Z_x$

$$
\text{左} = (hZ)_x = h(x) \cdot Z_x = \begin{cases} 0 = Z_x & (x \in U) \\ Z_x & (x \notin U) \quad \because h(x) = 1 \end{cases}
$$

$$
= Z_x = \text{右} \quad \blacksquare
$$

これより

$$
\begin{aligned}
(\omega(z))(g) &= (\omega(hz))(g) \\
&= (h\,\omega(z))(g) \\
&= \underbrace{h(g)}_{=0}\big((\omega(z))(g)\big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\square$

② について

更に次の Lemma を示す:

Lemma 7.2.5: $Z \in \mathfrak{X}(M)$ with $Z_p = 0$ とする.

このとき $(\omega(Z))(p) = 0$

Thm 7.2.3 は Lemma 7.2.5 から従う.

Pf of Lemma 7.2.5

$Z \in \mathfrak{X}(M)$, $Z_p = 0$ とする

㊦ $(\omega(Z))(p) = 0$

$(O, U, x) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ を fix.

このとき $a_1, \cdots, a_n \in C^\infty(O)$ であって

各 $q \in O$ について

$$Z_q = \sum_{i=1}^{n} a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q$$

となるものをとる.

$a_1(p) = \cdots = a_n(p) = 0$ に注意.

ここで $a_1, \cdots, a_n \in C^\infty(O)$ を

p のまわりの様子を保ったまま延長して、

それらを $\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n \in C^\infty(M)$ とする

また $\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}(O)$

$\left(\text{ただし } \frac{\partial}{\partial x_i} : O \to TO,\ q \mapsto \left(q, \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_q\right)\right)$

も p のまわりの様子を保ったまま延長して、

それらを $\widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)}, \cdots, \widetilde{\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)} \in \mathfrak{X}(M)$ とする.

ここで

$$\tilde{Z} := \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i \cdot \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}} \in \mathfrak{X}(M)$$

$$Z' := Z - \tilde{Z}$$ とおく.

このとき Z' は p のまわりでべったりゼロになるので

Lem 7.2.4 より $(\omega(Z'))(p) = 0$.

特に $(\omega(Z))(p) = (\omega(\tilde{Z}))(p)$ がわかる.

証 $(\omega(\tilde{Z}))(p) = 0$

$$(\omega(\tilde{Z}))(p) = \left(\sum_i \tilde{a}_i \, \omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\right)(p) \quad (\because \omega \text{ は } C^\infty(M)\text{-hom})$$

$$= \sum_i \tilde{a}_i(p) \left(\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\right)(p)$$

$$= \sum_i \underbrace{a_i(p)}_{=0} \left(\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}\right)\right)(p)$$

$$= 0$$

$\blacksquare$

◎ $\Lambda^1(M) \cong \Gamma(T^{(0,1)}M)$

Thm 7.2.6 : $\Gamma(T^{(0,1)}M)$ と $\Lambda^1(M)$ は以下の対応により

$C^\infty(M)$加群同型

$$\Gamma(T^{(0,1)}M) \to \Lambda^1(M)$$

$$\sigma \mapsto \omega^\sigma : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$$

$$X \mapsto f^\sigma_X : M \to \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \sigma_p(X_p)$$

$$\Lambda^1(M) \to \Gamma(T^{(0,1)}M)$$

$$\omega \mapsto \sigma^\omega : M \to T^{(0,1)}M$$

$$p \mapsto (p, \omega_p)$$

以下 $\Gamma(T^{(0,1)}M)$ と $\Omega^1(M)$ を同一視する.

Section 7.3：テンソル場（代数的定義）

設定：M ： n 次元 C^∞-mfd.

$s, t \geq 0$

記号：$\mathfrak{X}(M) = \{$ ベクトル場 on M $\}$ （$C^\infty(M)$-加群）

$\cong$

$\Gamma(T^{(1,0)}M)$

$A^1(M) = \{$ 1-form on M $\}$ （$C^\infty(M)$-加群）

$\cong$

$\Gamma(T^{(0,1)}M)$

Def 7.3.1 :

$$\mathrm{Ten}^{(s,t)}(M) := \mathrm{MH}_{C^\infty(M)}\left(\{\underbrace{A^1(M),\dots,A^1(M)}_{s}, \underbrace{\mathfrak{X}(M),\dots,\mathfrak{X}(M)}_{t}\}, C^\infty(M)\right)$$

$$\left(:= \{\alpha : (A^1(M))^s \times (\mathfrak{X}(M))^t \to C^\infty(M) \mid \text{多重 } C^\infty(M)\text{加群準同型}\}\right)$$

とおく.

$\mathrm{Ten}^{(s,t)}(M)$ の元を M 上の (s,t)-テンソル場と呼ぶ.

Rem : Prop 5.3.2 の意味で $\mathrm{Ten}^{(s,t)}(M)$ は $C^\infty(M)$-加群.

・テンソル場の性質

Thm 7.3.2 : $p \in M$, $\alpha \in \mathrm{Ten}^{(s,t)}(M)$ とする.

$$\exists!\, \alpha_p \in T_p^{(s,t)}M \text{ s.t. } \forall(\omega_1, \cdots, \omega_s, X_1, \cdots, X_t) \in (\Omega^1(M))^s \times (\mathfrak{X}(M))^t$$

$$(\alpha(\omega_1, \cdots, \omega_s, X_1, \cdots, X_t))(p) = \alpha_p((\omega_1)_p, \cdots, (\omega_s)_p, (X_1)_p, \cdots, (X_t)_p)$$

Hint : $(s,t) = (1,1)$ の場合で考えてみる.

ポイントは以下を示すこと:

Claim $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$(\alpha(\omega, X))(p)$ は $\omega_p \in T_p^\vee M$, $X_p \in T_pM$ のみに依る.

以下を示せば十分 (確認せよ)

ⓐ $\omega \in \mathcal{A}^1(M)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ with $X_p = Y_p$ について

$$(\alpha(\omega, X))(p) = (\alpha(\omega, Y))(p)$$

ⓑ $\omega, \rho \in \mathcal{A}^1(M)$ with $\omega_p = \rho_p$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$(\alpha(\omega, X))(p) = (\alpha(\rho, X))(p)$$

ⓐ, ⓑ は Thm 7.2.2 (1) と同様に示せる.

解析的定義 vs 代数的定義

Thm 7.3.3 : $\Gamma(T^{(s,t)}M)$ と $\mathrm{Ten}^{(s,t)}(M)$ は以下の対応により

$C^\infty(M)$ 加群同型

$$\Gamma(T^{(s,t)}M) \to \mathrm{Ten}^{(s,t)}(M)$$

$$\sigma \mapsto \alpha^\sigma : (\Lambda^1(M))^s \times (\mathfrak{X}(M))^t \to C^\infty(M)$$

$$(\omega_1 \cdots \omega_s, X_1 \cdots X_t) \mapsto f^\sigma : M \to \mathbb{R}$$

$$(\omega_1 \cdots \omega_s, X_1 \cdots X_t) \quad p \mapsto \sigma_p(\omega_1, \cdots, \omega_s, X_1 \cdots X_t)$$

$$\mathrm{Ten}^{(s,t)}(M) \to \Gamma(T^{(s,t)}M)$$

$$\alpha \mapsto \sigma^\alpha : M \to T^{(s,t)}M$$

$$p \mapsto (p, \alpha_p)$$

以降

$$\Gamma(T^{(s,t)}M) \text{ と } \mathrm{Ten}^{(s,t)}M$$

を同一視する.

まとめ:

Cor 7.3.4: 以下 $C^\infty(M)$-加群同型

- $C^\infty(M) \cong \Gamma(T^{(0,0)}M) \cong \mathrm{Ten}^{(0,0)}M$
- $\Gamma(T^{(1,0)}M) \cong \mathfrak{X}(M) \cong \mathrm{Ten}^{(1,0)}M$
- $\Gamma(T^{(0,1)}M) \cong A^1(M) \cong \mathrm{Ten}^{(0,1)}M$.
- $\Gamma(T^{(s,r)}M) \cong \mathrm{Ten}^{(s,r)}M \quad (s, r \geq 0)$