Section 8 : 交代形式

- 交代形式
- 外積
- 基底について
- ベクトル空間の向き

当面の目標 : 微分形式とその外微分を定義する.

Section 8.1 ： 交代形式

設定 ： V ： 有限次元ベクトル空間 $/\mathbb{R}$

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

記号 ： $(V^\vee)^{\otimes k} := \underbrace{V^\vee \otimes \cdots \otimes V^\vee}_{k\text{コ}}$

$\cong ML(\{\underbrace{V, \cdots, V}_{k\text{コ}}\}, \mathbb{R})$

Def 8.1.1 : $\phi \in (V^\vee)^{\otimes k}$ が V 上の k 次交代形式

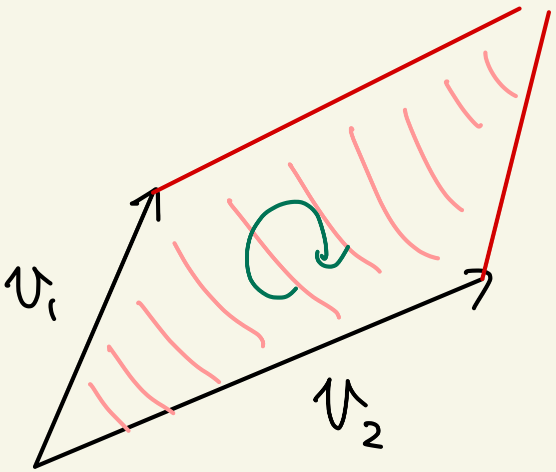
(k-form)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall (v_1, \cdots, v_k) \in V^k$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k$

$$\phi(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \phi(v_1, \cdots, v_k)$$

$\bigwedge^k V^\vee := \{ k\text{-forms on } V \}$ とおく.

2-form on V の役割



V 内の

各"向き付けられた平行四辺形"

に実数を与える.

Prop 8.1.2 : $\bigwedge^k V^\vee$ は $(V^\vee)^{\otimes k}$ の線型部分空間 $/\mathbb{R}$

Remark : $\bigwedge^0 V^\vee = (V^\vee)^{\otimes 0} \cong \mathbb{R}$

$\bigwedge^1 V^\vee \cong V^\vee$

Section 8.2 : 1-form から k-form を作る.

設定 : V : 有限次元ベクトル空間 / $\mathbb{R}$

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

1-from を k コ $\rightsquigarrow$ k-form

Prop 8.2.1 : $g_1, \cdots, g_k \in V^\vee \ (\cong \Lambda^1 V^\vee)$ とする.

このとき

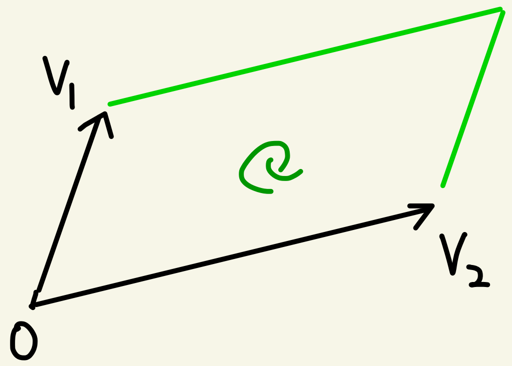
$$g_1 \wedge \cdots \wedge g_k : V^k \to \mathbb{R},\ (v_1, \cdots v_k) \mapsto \det\left(\underbrace{(g_i(v_j))_{i,j}}_{k \times k \text{ 正方行列}}\right)$$

は k-form

Ex 8.2.2:

$k=2$ のとき

$$\eta_1 \wedge \eta_2 (v_1, v_2) = \eta_1(v_1)\cdot\eta_2(v_2) - \eta_1(v_2)\cdot\eta_2(v_1)$$



Recall: $v_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

のとき

"v_1, v_2 の定める平行四辺形"の面積 $= |ad - bc|$

Prop 8.2.3 : $(V^\vee)^k \to \bigwedge^k V^\vee$ は 多重線型

$(y_1 \cdots y_k) \mapsto y_1 \wedge \cdots \wedge y_k$

Prop 8.2.4 : $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \forall (y_1, \cdots, y_k) \in (V^\vee)^k,$

$$y_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge y_{\sigma(k)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\,(y_1 \wedge \cdots \wedge y_k).$$

特に $y_i = y_j\ (i \neq j)$ となる i, j があると

$$y_1 \wedge \cdots \wedge y_k = 0$$

Section 8.3 : $\bigwedge^k V^\vee$ の基底

設定 : V : n 次元ベクトル空間 $/\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

目標は以下の定理 :

Thm 8.3.1 : $\dim \bigwedge^k V^\vee = \binom{n}{k}$ $\left(:= \prod_{i=1}^{k} \frac{(n-i)}{i} \right)$

Rem : $n > k$ のときは $\binom{n}{k} = 0$

まず次の命題を示す:

Prop 8.3.2 : $\phi \in \bigwedge^k V^\vee$, $(v_1, \cdots, v_k) \in V^k$ とする.

$\phi(v_1, \cdots, v_k) \neq 0 \Rightarrow$

$(v_1, \cdots, v_k)$ は一次独立

Cor 8.3.3 : $\bigwedge^k V^\vee = 0$ if $k > n := \dim V$

Prop 8.3.2 の証明

対偶を示す：$v_1, \cdots, v_k$ が一次従属であると仮定する.

㊥ $\phi(v_1, \cdots, v_k) = 0$

いま $v_1, \cdots, v_k$ は一次従属なので

$i_0 \in \{1, \cdots, k\}$ と $\{a_i \in \mathbb{R}\}_{i \neq i_0}$ であって

$$v_{i_0} = \sum_{i \neq i_0} a_i v_i$$ となるものがとれる.

次の Lemma を使って $\phi(v_1, \cdots, v_k) = 0$ を示す.

Lemma 8.3.4： $(w_1, \cdots, w_k) \in V^k$ について

どれか 2つの成分が等しいなら

$$\phi(w_1, \cdots, w_k) = 0$$

(easy)

$$
\begin{aligned}
\phi(v_1, \cdots, v_k) &= \phi\Big(v_1, \cdots, v_{i_0-1}, \sum_{i \neq i_0} a_i v_i, v_{i_0+1}, \cdots, v_k\Big) \\
&\overset{\text{多重線型性}}{=} \sum_{i \neq i_0} a_i \underbrace{\phi(v_1, \cdots, v_{i_0-1}, v_i, v_{i_0+1}, \cdots, v_k)}_{\text{Lem 8.3.4 より } 0} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$\boxed{\text{証}}$

次の命題と Cor 8.3.3 より Thm 8.3.1 が従う.

Prop 8.3.5 : $k \leq n := \dim V$ とする.

$\mathcal{B} = (e_i)_{i=1,\dots,n}$: V の基底を fix.

$\mathcal{B}^\vee = (e_i^\vee)_{i=1,\dots,n}$ を その双対基底とする.

このとき $\bigwedge^k \mathcal{B}^\vee := (e_{i_1}^\vee \wedge e_{i_2}^\vee \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^\vee)_{1 \leq i_1 \lneq i_2 \lneq \cdots \lneq i_k \leq n}$

は $\bigwedge^k V^\vee$ の基底

特に $\dim \bigwedge^k V^\vee = \binom{n}{k}$

Prop 8.3.5 の証明

示 ① $\bigwedge^k B^\vee$ は一次独立

② $\bigwedge^k B^\vee$ は $\bigwedge^k V^\vee$ を張る.

以下簡単のため

$$[n] := \{1, 2, \cdots, n\}$$

$$\binom{[n]}{k} := \{ I \subset [n] \mid \# I = k \}$$ とおく.

各 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ について

$$e_I^\vee := e_{i_1}^\vee \wedge \cdots \wedge e_{i_k}^\vee$$ とおく.

このとき $\bigwedge^k B^\vee = (e_I^\vee)_{I \in \binom{[n]}{k}}$ に注意.

① 示 $\bigwedge^k \mathcal{B}^\vee$ は一次独立

$\{a_I \in \mathbb{R}\}_{I \in \binom{[n]}{k}}$ であって $\sum_I a_I e_I^\vee = 0$ in $\bigwedge^k V^\vee$ となる

ものを任意にとる.

$\forall I \in \binom{[n]}{k}$ をとる.

示 $a_I = 0$

以下のLemmaを使う

Lemma 8.3.6 : $I = \{i_1, \ldots, i_k\}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ とする.

このとき 各 $I' \in \binom{[n]}{k}$ について

$$e^{\vee}_{I'}(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = \begin{cases} 1 & (\text{if } I = I') \\ 0 & (\text{if } I \neq I') \end{cases}$$

(easy)

いま

$$0 = \left(\sum_{I'} a_{I'} e^{\vee}_{I'}\right)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})$$

$$= a_I$$

① おわり

② (示) $\bigwedge^k B^\vee$ は $\bigwedge^k V^\vee$ を張る.

$\phi \in \bigwedge^k V^\vee$ を fix

(示) $^\exists \{a_I \in \mathbb{R}\}_{I \in \binom{[n]}{k}}$ s.t. $\phi = \sum_I a_I e_I^\vee$

各 $I = \{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ $(i_1 < i_2 < \cdots < i_k)$ について

$$a_I := \phi(e_{i_1}, \cdots e_{i_k}) \in \mathbb{R}$$ とおく.

(示) $\phi = \sum_I a_I e_I^\vee$

$v_1, \cdots, v_k \in V$ を任意にとる.

示) $\phi(v_1, \cdots, v_k) = \sum_I a_I e_I^\vee(v_1, \cdots, v_k)$

各 j について

$$v_j = \sum_{i_j=1}^{n} \underbrace{e_{i_j}^\vee(v_j)}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e_{i_j}}_{\in V}$$ に注意

これより

$$\phi(v_1,\cdots,v_k) = \phi\left(\sum_{i_1} e^\vee_{i_1}(v_1)e_{i_1}, \cdots, \sum_{i_k} e^\vee_{i_k}(v_k)e_{i_k}\right)$$

$$= \sum_{i_1\cdots i_k} e^\vee_{i_1}(v_1)\cdots e^\vee_{i_k}(v_k)\,\phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})$$

φの交代性
ヨ

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_k} \mathrm{sgn}(\sigma)\, e^\vee_{i_1}(v_{\sigma(1)})\cdots e^\vee_{i_k}(v_{\sigma(k)})\right)\phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})$$

$$= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\left((e^\vee_{i_1}\wedge\cdots\wedge e^\vee_{i_k})(v_1,\cdots,v_k)\right)\underbrace{\phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_k})}_{=\,a_I}$$

$$= \sum_I a_I\, e^\vee_I(v_1,\cdots,v_k)$$

∎

(2) おわり

@ V の基底のとり換えについて

設定：$\mathcal{B} = \{e_1, \cdots, e_m\}$, $\mathcal{B}' = \{e_1', \cdots, e_m'\}$ V の基底.

各 i について $e_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} e_j'$ と書く.

$P = (p_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ とおく（基底の変換行列）

記号：$\mathcal{B}^\vee = \{w_1, \cdots, w_n\}$, $(\mathcal{B}')^\vee = \{w_1', \cdots, w_n'\}$.

$\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ の双対基底

記号：$\binom{[m]}{k} := \{ \{1, \cdots, m\}$ の k 点部分集合 $\}$

各 $I := \{ i_1, \cdots, i_k \} \in \binom{[m]}{k}$ について

$(i_1 < \cdots < i_k)$

$W_I := w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k}$

$W'_I := w'_{i_1} \wedge \cdots \wedge w'_{i_k}$

$\in \bigwedge^k V^\vee$ とおく.

また $I, J \in \binom{[m]}{k}$ について

$P_{IJ} := (p_{ij})_{i \in I, j \in J}$ とおく（小行列）

Theorem 10.3.8 $I \in \binom{[m]}{k}$ を fix.

このとき

$$w_I = \sum_{J \in \binom{[m]}{k}} (\det P_{I,J})\, w'_J$$

Cor 10.3.9 ($k=n$ の場合 : 積分論で必要)

$$(w_1 \wedge w_2 \wedge \cdots \wedge w_n) = (\det P) \cdot (w'_1 \wedge \cdots \wedge w'_n)$$

Proof of Thm 10.3.8 : $I \in \binom{[m]}{k}$ を fix

$w_I \in \bigwedge^k V^\vee$ であり

$\{ w'_J \mid J \in \binom{[m]}{k} \}$ は $\bigwedge^k V^\vee$ の基底であるから

(Thm 10.3.1)

$$w_I = \sum_{J \in \binom{[n]}{k}} a_J \, w'_J \qquad (a_J \in \mathbb{R})$$

と一意的に表せる.

示 $\forall J \in \binom{[n]}{k}$, $a_J = \det P_{I,J}$

$\forall J \in \binom{[m]}{k}$ をとる.

示 $a_J = \det P_{I,J}$

Lemma 10.3.7 より $J = \{j_1, \cdots, j_k\}$ $(j_1 < \cdots < j_k)$ と書いたとき,

各 $J' \in \binom{[m]}{k}$ について

$$w_{J'}(e'_{j_1}, \cdots, e'_{j_k}) = \begin{cases} 1 & (J = J') \\ 0 & (J \neq J') \end{cases}$$

に注意すると, $a_J = w_I(e'_{j_1}, \cdots, e'_{j_k})$

証) $w_I(e'_{j_1}, \cdots, e'_{j_k}) = \det P_{I,J}$

左辺 $= (w_{i_1} \wedge \cdots \wedge w_{i_k})(e'_{j_1}, \cdots, e'_{j_k})$

$$= \det \begin{pmatrix} w_{i_1}(e'_{j_1}) & \cdots & w_{i_1}(e'_{j_k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{i_k}(e'_{j_1}) & \cdots & w_{i_k}(e'_{j_k}) \end{pmatrix} \quad (\because \text{Prop } 10.2.7)$$

$$= \det \begin{pmatrix} P_{i_1 j_1} & \cdots & P_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ P_{i_k j_1} & \cdots & P_{i_k j_k} \end{pmatrix} = \det P_{IJ}$$

証

$(\because \ w_i(e'_j) = P_{ij})$

8.4：有限次元ベクトル空間の向き（講義では省略）

設定：V：n 次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

Recall：$\bigwedge^n V$ は $\binom{n}{n} = 1$ 次元ベクトル空間$/\mathbb{R}$

特に $\bigwedge^n V \setminus \{0\}$ は 2つの連結成分を持つ

Def 8.4.1：

$\bigwedge^n V \setminus \{0\}$ の連結成分を V の向き（orientation）と呼ぶ

Def 8.4.2

$\mathcal{B} := \{v_1, \cdots, v_n\}$ を V の ordered basis とする

このとき $v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \in \bigwedge^n V \setminus \{0\}$ を含む $\bigwedge^n V \setminus \{0\}$ の連結成分を

"$\mathcal{B}$ の定める V の向き" と呼ぶ.

Prop 8.4.3

$\mathcal{B} = \{v_1 \cdots v_n\}$, $\mathcal{B}' = \{v_1', \cdots, v_n'\}$ をそれぞれ V の ordered basis とする. 以下は同値:

(i) $\mathcal{B}$ の定める V の向き $=$ $\mathcal{B}'$ の定める V の向き

(ii) $\mathcal{B}$ から $\mathcal{B}'$ への基底の変換行列の det が正.

Section 8.5：交代形式の外積（講義では省略）

<u>設定</u>：V：有限次元ベクトル空間$/_{\mathbb{R}}$

$k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 8.5.1 : $\phi_1 \in \bigwedge^k V^\vee$, $\phi_2 \in \bigwedge^\ell V^\vee$ について

$$\phi_1 \wedge \phi_2 : V^{k+\ell} \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \cdots, v_{k+\ell}) \mapsto \frac{1}{k!\,\ell!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+\ell}} \mathrm{sgn}(\sigma) \underbrace{\phi_1(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(k)})}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{\phi_2(v_{\sigma(k+1)}, \cdots, v_{\sigma(k+\ell)})}_{\in \mathbb{R}}$$

と定める.

Prop 8.5.2 . $\phi_1 \wedge \phi_2 \in \bigwedge^{k+\ell} V^\vee$

ϕ_1 と ϕ_2 の外積

Prop 8.5.3 : $\phi_2 \wedge \phi_1 = (-1)^{k\ell} \phi_1 \wedge \phi_2$

Def 8.5.4 : $\overset{*}{\bigwedge} V^\vee := \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\overset{k}{\bigwedge} V^\vee)$ とおく.

Prop 8.5.5 : $\overset{*}{\bigwedge} V^\vee$ は外積について

単位的結合的 $\mathbb{R}$ 代数 (次元は $2^{\dim V}$)

特に $\phi_1 \cdots \phi_m \in \overset{*}{\bigwedge} V^\vee$ に対して

$\phi_1 \wedge \cdots \wedge \phi_m$ が定義される.

Rem : $g_1, \cdots, g_k \in \overset{1}{\bigwedge} V^\vee$ のときは

上記 $g_1 \wedge \cdots \wedge g_k$ と Def 8.2.1 は一致する.