Section 9 : 微分形式

- 微分形式の def
- 0-form の外微分

  ||

  関数

- 1-form から k-form
- 局所表示

本節の目標: 微分形式と外微分の def

Section 9.1 : 微分形式

設定 : M : n次元 C^∞-mfd.

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 9.1.1 : $\omega \in \mathrm{Ten}^{(0,k)}(M) \simeq \Gamma(T^{(0,k)}M)$

が微分 k-形式 (differential k-form)

単に k-form とよぶ

$\overset{\text{def}}{\iff} \forall p \in M,\ \omega_p \in \Lambda^k(T_p^\vee M)$

各点で接空間上の(交代) k-form を定めている.

$$\left(\iff \forall X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M),\ \forall \sigma \in \mathfrak{S}_k,\ \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot \omega(X_1, \dots, X_k) \right)$$

$$\Lambda^k(M) := \{ \omega : k\text{-form on } M \} \in \mathrm{Ten}^{(0,k)}(M)$$

とおく

Rem :

- $\Lambda^0(M) = \mathrm{Ten}^{(0,0)}(M) = C^\infty(M)$
- $\Lambda^1(M) = \mathrm{Ten}^{(0,1)}(M) = \Gamma(T^\vee M)$ (cf. Section 7)
- $\Lambda^k(M) = 0$ if $k > n$ (cf. Cor 8.3.3)

Prop 9.1.2 : $A^k(M)$ は $Ten^{(0,k)}(M)$ の

sub $C^\infty(M)$ -mod.

特に $A^k(M)$ は $C^\infty(M)$ -mod.

Section 9.2 : 0-form の外微分

設定 : M : n次元 C^∞-mfd.
$\overset{\shortparallel}{(M, \mathcal{A})}$

Prop 9.2.1 各 $f \in C^\infty(M) \doteqdot \Lambda^0(M)$ について

$$df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M), \ X \mapsto Xf$$

とおくと,

$df \in \Lambda^1(M)$.

df を f の外微分と呼ぶ.

◎ 全微分と外微分

$f \in C^\infty(M)$ とする.

$\mathbb{R}$ を C^∞-mfd とみなし, $f : M \to \mathbb{R}$ を C^∞ 級写像とみなす

各 $p \in M$ について 全微分 $(df)_p : T_pM \to T_{f(p)}\mathbb{R}$ が定まる.

$T_{f(p)}\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ とみると $(df)_p \in T_p^*M$ が示せる.

Prop 9.2.2: 上の設定で,

Prop 9.2.1 の $df \in \Omega^1(M)$ を $\Gamma(T^*M)$ の元とみなすと

df の p における余接ベクトルは上記の $(df)_p$ と一致する.

(cf. Section 7.2)

後で使う記号の準備：

各 $(O, U, x) \in A$ について

$x_i : O \to \mathbb{R},\ p \mapsto (x(p))_i$ を $x_i \in C^\infty(O)$ とみなす

Prop 9.2.1 の意味で $dx_i \in A^1(O)$ が定まる.

各点 $p \in O$ において

$\{(dx_i)_p\}_{i=1,\cdots,n}$ は座標基底 $\{(\frac{\partial}{\partial x_i})_p\}_{i=1,\cdots,n}$ of T_pM

の双対基底 of $T_p^\vee M$

(cf. Prop 9.2.2, Thm 3.1.1)

◎ 外微分の局所表示

Prop 9.2.3 : $f \in C^\infty(M)$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ とする.

このとき

$$\underbrace{(df)|_O}_{\in\, \mathcal{A}^1(O)} = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial}{\partial u_i}(f|_O)}_{\in\, C^\infty(O)} \cdot \underbrace{du_i}_{\in\, \mathcal{A}^1(O)}$$

外微分は偏導関数を計算すれば求められる

(localには)

Hint : Prop 9.2.2 より, 各点では全微分と思ってよい.

Section 9.3 : 1-form から k-form

設定 : M : n次元 C^∞-mfd.

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Prop 9.3.1 : $\eta_1, \cdots, \eta_k \in \mathcal{A}^1(M) \cong \mathrm{Ten}^{(0,1)}(M)$ について

$$\begin{aligned} \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k : M &\to T^{(0,k)}M \\ p &\mapsto (p, \underbrace{(\eta_1)_p \wedge \cdots \wedge (\eta_k)_p}_{\bigwedge^k T_p^\vee M \,\subset\, T_p^{(0,k)} M}) \end{aligned}$$

とおくと、これは k-form

Prop 9.3.2: $(\Lambda^1(M))^k \to \Lambda^k(M)$ は

$(\eta_1, \dots, \eta_k) \mapsto \eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k$

交代的 (i.e. $\eta_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge \eta_{\sigma(k)} = \mathrm{sgn}(\sigma) \cdot (\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_k)$)

かつ 多重 $C^\infty(M)$ 加群準同型

◎ 微分形式の局所表示

記号 $\binom{[n]}{k} := \{\, [n] := \{1, \cdots, n\}$ の k 点部分集合 $\}$

$\{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}$ と書いたら $i_1 \lneq \cdots \lneq i_k$ の意味とする.

Prop 9.3.3 : 各 $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

$\exists!\ \{a_{i_1 \cdots i_k} \in C^\infty(O)\}_{\{i_1 \cdots i_k\} \in \binom{[n]}{k}}$ s.t.

$$\underbrace{\omega|_O}_{\in\, \mathcal{A}^k(O)} = \sum_{\{i_1, \cdots, i_k\} \in \binom{[n]}{k}} \underbrace{a_{i_1 \cdots i_k}}_{\in\, C^\infty(O)} \cdot \underbrace{(du_{i_1} \wedge du_{i_2} \wedge \cdots \wedge du_{i_k})}_{\in\, \mathcal{A}^k(O)}$$

Ex 9.3.4: $\mathbb{R}^n$ を n 次元 C^∞-mfd とみなす.

$x_1 \cdots x_n \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ を座標関数とし,

$dx_1, \cdots, dx_n \in A^1(\mathbb{R}^n)$ を考える.

このとき $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \in A^n(\mathbb{R}^n)$: n-form

($\mathbb{R}^n$ 上の"体積要素")

各点 $p = (p_1 \cdots p_n) \in \mathbb{R}^n$ において

$$(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n)_p$$

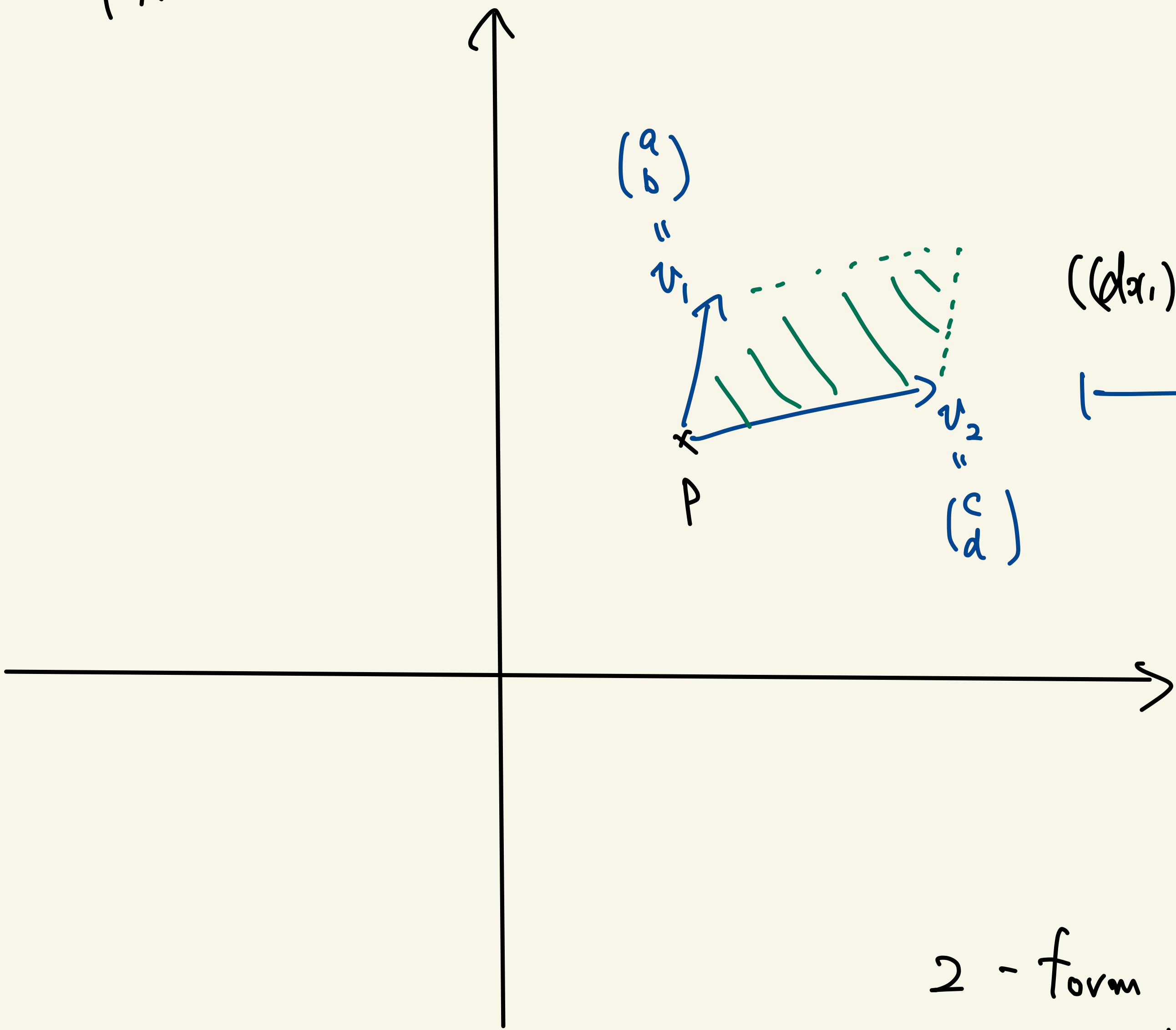
$$= (dx_1)_p \wedge \cdots \wedge (dx_n)_p : (T_pM)^n \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \cdots, v_n) \mapsto \det\left(((dx_i)_p(v_j))_{i,j}\right)$$

$$\left(v_j = \sum_i a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \text{ とおく} \right) \qquad \| $$

$$\det((a_{ij})_{i,j})$$

イメージ



$$((dx_1)\wedge(dx_2))_p \longmapsto \det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

2-form は

各"何らかの微小平行四辺形"

に実数を返す.

Ex 9.3.4 :

$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \}$: n 次元 C^∞-mfd.

$\omega_{S^n} \in \mathcal{A}^n(S^n)$ を以下で定める:

各 $p \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について

$$(\omega_{S^n})_p : (T_pS^n)^n \to \mathbb{R}$$

$$(v_1, \cdots, v_n) \mapsto \det\begin{pmatrix} p & v_1 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$$ とおく.

(ただし $p \in \mathbb{R}^{n+1}$, $v_1, \cdots, v_n \in T_pS^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^{n+1}$

をそれぞれ $n+1$ 縦ベクトルとみなしている.)

このとき

$$\begin{aligned} \omega_{S^n} : S^n &\to T^{(0,n)} S^n \\ p &\mapsto (p, (\omega_{S^n})_p) \end{aligned}$$ は $A^n(S^n)$ の元とする.

レポート問題 9.3.5:

ω_{S^n} を local に Prop 9.3.3 の形で書き下せ.

(S^n の局所座標を1つ具体的に選び, Prop 9.3.3 の形で ω_{S^n} を書いたときの係数関数を求めよ.)

大変だと思ったら $n=1,2$ の2つやれば OK とする.

Section 9.4: 微分形式の外積　(講義では省略)

設定: M : n次元 C^∞-mfd

Prop 9.4.1: $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

各 $\omega_1 \in \Lambda^{k_1}(M)$, $\omega_2 \in \Lambda^{k_2}(M)$ について

$$\omega_1 \wedge \omega_2 : M \to T^{(0, k_1+k_2)}M$$
$$p \mapsto (p, \underbrace{(\omega_1)_p \wedge (\omega_2)_p}_{\text{交代形式の外積 (Section 8.5)}})$$

とおくと

$$\underbrace{\omega_1 \wedge \omega_2}_{\omega_1 \text{ と } \omega_2 \text{ の外積}} \in \Lambda^{k_1+k_2}(M).$$

Prop 9.4.2 : $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする．

$\omega_1 \in \Lambda^{k_1}(M)$, $\omega_2 \in \Lambda^{k_2}(M)$ について

$$\omega_2 \wedge \omega_1 = (-1)^{k_1 k_2} \omega_1 \wedge \omega_2$$

Prop 9.4.3 :

$$\Lambda^{k_1}(M) \times \Lambda^{k_2}(M) \to \Lambda^{k_1+k_2}(M)$$

$$(\omega_1, \omega_2) \longmapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

は 双重 $C^\infty(M)$-加群準同型

Prop 9.4.4 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする.

各 $f \in C^\infty(M)$, $\omega \in \Lambda^k(M)$ について

$$\underbrace{f\omega}_{\omega\text{ の }f\text{ 倍}} = \underbrace{f \wedge \omega}_{0\text{-form } f \text{ と } \omega \text{ の外積}} \quad \text{in } \Lambda^k(M)$$

以下 $\Lambda^*(M) := \bigoplus_{k\geq 0} \Lambda^k(M) = \bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(M)$ とおく.

Thm 9.4.4:

外積"$\wedge$"は $\Lambda^*(M)$ 上の双重 $C^\infty(M)$-加群準同型

$$\Lambda^*(M) \times \Lambda^*(M) \longrightarrow \Lambda^*(M)$$
$$(\omega_1, \omega_2) \longmapsto \omega_1 \wedge \omega_2$$

を定める.

これは $\Lambda^*(M)$ 上の単位的結合的 $\mathbb{R}$代数 でもある.

"次数付き"