Section 10：ベクトル場のbracket積

準備

当面の目標：微分形式と外微分をdef.

内容

- ベクトル場のbracket積のdef.
- 局所表示.

Section 10.1 : bracket 積の定義

設定 : M : n 次元 C^∞-mfd

記号 : $\mathfrak{X}(M)$: M 上のベクトル場全体

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(T^{(1,0)}M)$$

Prop 10.1.1: 各 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$[X, Y] : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$$
$$f \mapsto X(Yf) - Y(Xf)$$

とおくと、$[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$.

注意

XY, YX : $C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, $f \mapsto X(Yf)$, $f \mapsto Y(Xf)$ は

$\mathfrak{X}(M)$ の元になるとは限らない.

Def 10.1.2: $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ を bracket 積

$(X, Y) \mapsto [X, Y]$ と呼ぶ

Prop 10.1.3 $\mathfrak{X}(M)$ は bracket 積により Lie 代数となる.

すなわち以下を満たす

- $\mathfrak{X}(M)$ はベクトル空間で, bracket 積は双線型
- $[X, Y] = -[Y, X] \quad ({}^\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M))$
- $[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]$

(Jacobi 律) $\quad ({}^\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$

注意: bracket 積は結合的とは限らない

Prop 10.1.4 : $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ について

$$[fX, Y] = f \cdot [X, Y] - (Yf) \cdot X$$

$$[X, fY] = f \cdot [X, Y] + (Xf) \cdot Y$$

注意 : bracket 積 $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$

は 双 $C^\infty(M)$-hom とは限らない

Section 10.2 : bracket積の局所表示

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n次元 C^∞-mfd.

$(O, U, u) \in \mathcal{A}$

Recall: $i=1,\cdots,n$ について

$$\frac{\partial}{\partial x_i} : O \to TO \subset TM,\ p \mapsto \left(p, \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right)$$ はベクトル場

Prop 10.2.1: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ in $\mathfrak{X}(O)$

$(\forall i, j = 1, \cdots, n)$

(i.e. $\forall f \in C^\infty(O)$, $\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f = \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i} f$)

記号 : 各 $X \in \mathfrak{X}(M)$ について

$a_1^X, \cdots, a_n^X \in C^\infty(O)$ を

$$X|_O = \sum_{i=1}^{n} a_i^X \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \in \mathfrak{X}(O)$$

制限

を満たすものとする.

(一意に決まる)

Prop 10.2.2：各 $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ について

$$[X,Y]|_O = [X|_O, Y|_O]$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial a_i^X}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial a_j^Y}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial a_k^X}{\partial x_l} + \frac{\partial a_k^Y}{\partial x_l} \right) \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \in \mathfrak{X}(O)$$

注意：$[X,Y]_p$ は

X, Y の p のまわりの様子のみに依存して決まる．

（X_p, Y_p のみからは決まるとは限らない）

Cor 10.2.3 : $\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

$\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $[X, Y]|_{\Omega} = [X|_{\Omega}, Y|_{\Omega}]$

後で使う

Cov 10.2.4: $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし,

$p \in M,\ v_1, \cdots, v_k \in T_pM$ とする.

このとき

$^{\exists} X_1, \cdots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ s.t. $(X_i)_p = v_i \ (i=1, \cdots, n)$

p につ

$p \in {}^{\exists}\Omega \underset{\text{open}}{\subset} M$

s.t. $^{\forall} i,j = 1, \cdots, k,\ [X_i, X_j]|_\Omega = 0$

p のまわりで $X_1 \cdots X_k$ は可換

bracket 積でゼロ.

Hint: Prop 7.2.2 の Hint

気持ち：$[X,Y]$ は "Y の X による微分".

Lie 微分

"flow" を知っている人向け

Thm 10.2.5：$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $p \in M$ とする.

$$[X,Y]_p = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\underbrace{(d\phi_t^X)_{\phi_{-t}^X(p)} \left(Y_{\phi_{-t}^X(p)}\right) - Y_p}_{\in T_pM} \right)$$

ただし $\{\phi_t^X\}_t$ は X の生成する M 上の flow とする.

(詳細略)

イメージ

X Y $[X, Y]$