Section 11 : 微分形式の外微分

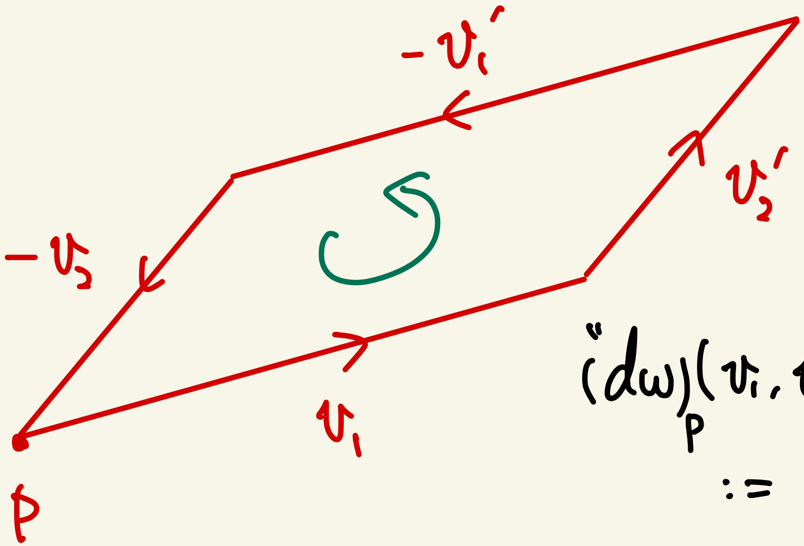
- 外微分の def
- $d^2 = 0$ ⇝ de Rham コホモロジー (def するだけ)
- 外積と外微分
- 引き戻しと外微分

当面の目標 : 微分形式と外微分を def.

外微分の気持ち： ω を 1-form とする。（接ベクトルを実数に変換する）

（$k=1$ のとき）

2-form $d\omega$ を作りたい（微小平行四辺形を実数に変換する）



$$\text{"}(d\omega)_p(v_1, v_2) := \omega_p(v_1) + \underbrace{\omega_p(v_2')}_{?} + \underbrace{\omega_p(-v_1')}_{?} + \omega_p(-v_2)\text{"}$$

と定めたい

難点) "v_1'" は "V_1 を v_2 に沿って平行移動したもの"

として定義したいところであるが、

"平行移動" は自然には定義できない。

アイデア: ベクトル場を考える! (代数的定義と解析的定義の対応を使う)

Section 11.1 : 外微分

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n 次元 C^∞- mfd

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Prop 11.1.1 : 各 $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ について

$$d\omega : \mathfrak{X}(M)^{k+1} \to C^\infty(M)$$

$$(X_1, \cdots, X_{k+1}) \longmapsto \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} X_s\, \omega(X_1, \cdots, \hat{X_s}, \cdots, X_{k+1})$$

X_s を抜く

$$+ \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X_i}, \cdots, \hat{X_j}, \cdots, X_{k+1})$$

ベクトル場のブラケット

X_i X_j を抜く

ω の外微分

は $(k+1)$-form on M.

Remark : $k=0$ のとき $A^0(M) \cong C^\infty(M)$.

Section 9.2 の外微分の def

$$\left(f \in C^\infty(M) \text{ について } \quad df : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M),\ X \mapsto Xf \right)$$

と Prop 11.1.1 の def は整合的.

Prop 11.1.1 a
Hint

$k=1$ のとき

$$d\omega(X_1,X_2) := X_1\,\omega(X_2) - X_2\,\omega(X_1) - \omega([X_1,X_2])$$

チェック項目：

・多重加群準同型 $\left\{\begin{array}{l}\text{和 (easy)}\\ \text{スカラー倍 (easy)}\\ \text{関数倍}\end{array}\right.$

・交代的 (easy)

$$\begin{aligned}
d\omega(fX_1,X_2) &= (fX_1)\,\omega(X_2) - X_2\,\omega(fX_1) - \omega([fX_1,X_2])\\
&= f\cdot(X_1\,\omega(X_2)) - X_2(f\cdot\omega(X_1)) - \omega(f[X_1,X_2]-(X_2f)X_1)\\
&= f\cdot(X_1\,\omega(X_2)) - (X_2f)\,\omega(X_1) - f\cdot(X_2\,\omega(X_1))\\
&\qquad - f\,\omega([X_1,X_2]) + (X_2f)\,\omega(X_1)\\
&= f\,d\omega(X_1,X_2)
\end{aligned}$$

Prop 11.1.2 :

$$d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M), \quad \omega \mapsto d\omega$$

$\left(\begin{smallmatrix} \shortparallel \\ d_k \end{smallmatrix}\right)$ は線型 $/\mathbb{R}$

Prop 11.1.3 : $\forall \omega \in \Lambda^k(M)$, $\forall f \in C^\infty(M)$

$$d(f\omega) = \underbrace{df}_{\text{1-form}} \wedge \underbrace{\omega}_{\text{k-form}} + f\, d\omega$$

Section の仕（講義では省いた）

⽈ Section 9.3 で一般化する

◎ $(d\omega)_p$ について：

Prop 11.1.4： $p \in M$, $v_1, \cdots, v_{k+1} \in T_pM$ とする.

また $X_1, \cdots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ が

- $(X_i)_p = v_p$
- $[X_i, X_j]_p = 0 \quad (\forall i, j)$

を満たすとする.

このような $X_1, \cdots, X_{k+1}$ は存在する (cf. Cor 10.2.4)

このとき

$$(d\omega)_p (v_1, \cdots, v_{k+1}) = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} v_s \left(\omega(X_1, \cdots, \hat{X_s}, \cdots, X_{k+1}) \right)$$

X_s を抜く

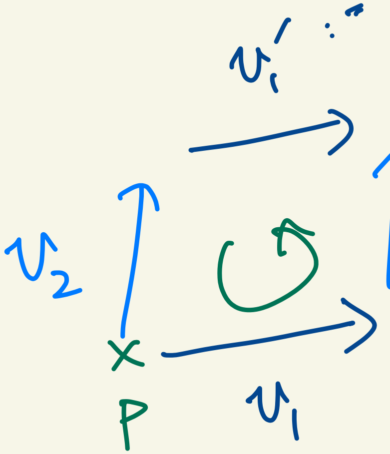
$(d\omega)_p$ のイメージ $(k=1)$：

$v_1, v_2 \in T_pM$ とし，$X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ が $(X_i)_p = v_i \quad (i=1,2)$

を満たすとする．

このとき $(d\omega)_p(v_1, v_2) = v_1\,\omega(X_2) - v_2\,\omega(X_1)$

$v_1' :=$ v_1 を X_2 で流したもの



$v_2' :=$ v_2 を X_1 で流したもの

$$(d\omega)_p(v_1, v_2) \doteqdot \text{“}\,\underbrace{\omega(v_2') - \omega(v_2)}_{\fallingdotseq\, v_1\,\omega(X_2)} - \big(\underbrace{\omega(v_1') - \omega(v_1)}_{\fallingdotseq\, v_2\,\omega(X_1)}\big)\,\text{”}$$

外微分の局所表示：

Prop 11.1.5： $\omega \in \Omega^k(M)$, $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ とし,

$$\omega|_O = \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\} \\ \in \binom{[n]}{k}}} a_{i_1\cdots i_k}\, du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_k} \quad \text{とする.}$$

(cf. Prop 9.2.3)

$(a_{i_1\cdots i_k} \in C^\infty(O))$

このとき

$$(d\omega)|_O = \sum_{\substack{\{j_1\cdots j_{k+1}\} \\ \in \binom{[n]}{k+1}}} \left(\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial u_{j_s}} a_{j_1\cdots \hat{j_s} \cdots j_{k+1}} \right) du_{j_1}\wedge\cdots\wedge du_{j_{k+1}}$$

$\hat{j_s}$ を抜く

$$= \sum_{\{i_1\cdots i_k\}} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial u_j} a_{i_1\cdots i_k}\right)}_{\in C^\infty(O)} \underbrace{du_j \wedge du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_k}}_{\in \Omega^{k+1}(O)}$$

$$= \sum_{\substack{\{i_1,\dots,i_k\} \\ \in \binom{[n]}{k}}} \underbrace{(da_{i_1\cdots i_k})}_{\in \Omega^1(O)} \wedge du_{i_1}\wedge\cdots\wedge du_{i_k}$$

Proof of Prop 11.1.5

示 $\displaystyle (d\omega)|_O = \sum_{\substack{\{j_1\cdots j_{k+1}\} \\ \in \binom{[n]}{k+1}}} \left(\sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial}{\partial u_{j_s}} a_{j_1 \cdots \hat{j_s} \cdots j_{k+1}} \right) du_{j_1} \wedge \cdots \wedge du_{j_{k+1}}$

$\hat{j_s}$ を抜く

だけ示す.

$\displaystyle (d\omega)|_O = \sum_{\substack{\{j_1\cdots j_{k+1}\} \\ \in \binom{[n]}{k+1}}} b_{j_1\cdots j_{k+1}} \, du_{j_1} \wedge \cdots du_{j_{k+1}}$ とおく

$\left(b_{j_1 \cdots j_{k+1}} \in C^\infty(O) \right)$

$\forall p \in O$ をとる. $\forall \{j_1 \cdots j_{k+1}\} \in \binom{[n]}{k+1}$ をとる.

示 $\displaystyle b_{j_1\cdots j_{k+1}}(p) = \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \left(\frac{\partial}{\partial u_{j_s}}\right)_p \left(a_{j_1 \cdots \hat{j_s} \cdots j_{k+1}}\right)$

$\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} \in \mathfrak{X}(O)$ をそれぞれ p のまわりの形を保って延長し、

それらを $\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_1}}, \cdots \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_n}} \in \mathfrak{X}(M)$ とする.

$\left[\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_i}}, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_j}} \right]_p = 0$ に注意. $(\forall i, j)$

また $\underbrace{\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}}, \cdots, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}}\right)}_{\in C^\infty(M)}$ は $\underbrace{a_{j_1 \cdots j_{k+1}}}_{\in C^\infty(O)}$ と p のまわりで一致.

$\widehat{\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}}}$ を抜く

$\hat{j_s}$ を抜く

このとき

$$\text{左辺} = b_{j_1 \cdots j_{k+1}}(p) = (d\omega)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}\right)_p, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}\right)_p\right)$$

$$= \left(d\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}}, \cdots, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}}\right)\right)(p)$$

∵ Prop 11.1.4 $\rightarrow$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}\right)_p \left(\omega\left(\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_1}}}, \cdots, \widehat{\widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}}}, \cdots, \widetilde{\frac{\partial}{\partial x_{j_{k+1}}}}\right)\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{k+1} (-1)^{s+1} \left(\frac{\partial}{\partial x_{j_s}}\right)_p a_{j_1 \cdots \hat{j_s} \cdots j_{k+1}}$$

$$= \text{右辺}$$

∎

○ 外微分の局所性

Prop 11.1.6 : $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

各 $\omega \in \Lambda^k(M)$ について

$$(d\omega)|_O = d(\underbrace{\omega|_O}_{\in \Lambda^k(O)}) \quad \text{in } \Lambda^{k+1}(O)$$

Section 11.2 : de Rham 鎖複体

設定 : M : n次元 C^∞-mfd.

Thm 11.2.1 : $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $d^2 = d_{k+1} \circ d_k = 0$

as $\Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+2}(M)$

$$\left(\Lambda^k(M) \xrightarrow{d_k} \Lambda^{k+1}(M) \xrightarrow{d_{k+1}} \Lambda^{k+2}(M) \right)$$

Proof of Thm 11.2.1 :

$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\omega \in \Omega^k(M)$, $p \in M$ を fix.

示. $(d^2\omega)_p = 0$ in $\Lambda^{k+2} T_p^\vee M$

$v_1, \dots, v_{k+2} \in T_pM$ を fix

示. $(d^2\omega)_p(v_1, \dots, v_{k+2}) = 0$

$X_1, \dots, X_{k+2} \in \mathfrak{X}(M)$ を $\begin{cases} (X_i)_p = v_i \quad (i = 1, \dots, k+2) \\ [X_i, X_j] \text{ は } p \text{ のまわりでゼロ} \end{cases}$

となるようにとる (cf. Cor 10.2.4)

$$(d^2\omega)_p(v_1, \cdots, v_{k+2})$$

$$= (d(d\omega))_p(v_1, \cdots, v_{k+2})$$

$$= \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} v_s\Big(d\omega(X_1, \cdots, \underset{X_s \text{ を抜く.}}{\hat{}}, X_{k+2})\Big)$$ となる. (∵ Prop 11.1.4)

$$= \sum_{s=1}^{k+2} (-1)^{s+1} v_s \Bigg(\sum_{l=1}^{s-1} (-1)^{l+1} X_l\big(\omega(X_1 \cdots \underset{X_l}{\hat{}} \; \underset{X_s}{\hat{}} \; X_{k+2})\big) + \sum_{l=s+1}^{k+2} (-1)^{l} X_l\big(\omega(X_1 \cdots \underset{X_s}{\hat{}} \; \underset{X_l}{\hat{}} \; X_{k+2})\big) \Bigg)$$

(∵ Def of "d" and $[X_i, X_j]$ が p のまわりでゼロ)

$$= \sum_{l<s} (-1)^{s+l}\big(X_s X_l(\omega(X_1, \cdots \underset{X_l}{\hat{}} \; \underset{X_s}{\hat{}} , X_{k+2}))\big)(p)$$

$$- \sum_{s<l} (-1)^{s+l}\big(X_s X_l(\omega(X_1 \cdots \underset{X_s}{\hat{}} \; \underset{X_l}{\hat{}} \; X_{k+2}))\big)(p)$$

$$= \sum_{l<s} (-1)^{s+l} \left(X_s X_l \left(\omega\left(X_1, \dots, \underset{X_l}{\hat{}}\ \dots, \underset{X_s}{\hat{}}\ \dots, X_{k+2}\right)\right)\right)(p)$$

$$- \sum_{l<s} (-1)^{s+l} \left(X_l X_s \left(\omega\left(X_1, \dots \underset{X_l}{\hat{}}\ \dots \underset{X_s}{\hat{}}\ \dots X_{k+2}\right)\right)\right)(p)$$

$$= \sum_{l<s} (-1)^{s+l} \underbrace{[X_s, X_l]_p}_{\substack{\shortparallel \\ 0}} \omega\left(X_1 \dots \underset{X_l}{\hat{}}\ \dots \underset{X_s}{\hat{}}\ \dots X_{k+2}\right)$$

$$= 0$$

$\boxtimes$

Def 11.2.2: $d_{-1} : 0 \to \overset{C^\infty(M)}{\overset{\parallel}{A^0(M)}}$ をゼロ写像とする.

$0 \xrightarrow[d_{-1}]{} A^0(M) \xrightarrow[d_0]{} A^1(M) \xrightarrow[d_1]{} \cdots$ を de Rham 鎖複体とよぶ.

Cor 11.2.3 各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Thm 11.2.1

$\mathrm{Im}\, d_{k-1} \subset \mathrm{Ker}\, d_k$ in $A^k(M)$

ここの元を closed k-form と呼ぶ.

Def 11.2.4 $H^k_{dR}(M) := \mathrm{Ker}\, d_k / \mathrm{Im}\, d_{k-1}$ as a vector space$/\mathbb{R}$

k次 de Rham コホモロジー of M.

とりあえず def しただけ

Ex 11.2.5 : $M=\mathbb{R}$ の場合

$$H^k_{dR}(M) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k=0) \\ 0 & (k\neq 0) \end{cases}$$

∵ $A^k(\mathbb{R})=0 \quad (k\geq 2)$ に注意

示 ① $\operatorname{Ker} d_0 \cong \mathbb{R}$

② $d_1 : A^0(\mathbb{R}) \to A^1(\mathbb{R})$ は全射

① 各 $f\in A^0(\mathbb{R})$ について $d_0 f = df = \underset{\in A^1(\mathbb{R})}{f'\,dx}$ に注意.

$f\in \operatorname{Ker} d_0 \Longleftrightarrow f'=0 \Leftrightarrow f$ は定数.

微積分の基本定理から分かる

従って $\operatorname{Ker} d_0 = \{$定数 on $\mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$

② $\forall \omega \in A^1(\mathbb{R})$ をとる.

$\exists ! g \in C^\infty(\mathbb{R})$ s.t. $\omega = g\, dx$ と書ける. (Prop 9.2.3)

㊥ $\exists f \in C^\infty(\mathbb{R})$ s.t. $df = \omega$

i.e. $f' = g$

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$ とおけば

$$a \mapsto \int_0^a g\, dx$$

$f \in C^\infty(\mathbb{R})$ かつ $f' = g$ (微積分の基本定理)

Ex 11.2.6 : $M = S^1$ の場合

$$H^k_{dR}(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{R} & (k = 0, 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

∵ $\Lambda^k(S^1) = 0 \quad (k \neq 0, 1)$ に注意.

示す ① $\mathrm{Ker}\, d_0 \cong \mathbb{R}$

② $\Lambda^1(S^1) / \mathrm{Im}\, d_0 \cong \mathbb{R}$ $\quad \left(\because \ \mathrm{Ker}\, d_1 = \Lambda^1(S^1) \quad d_1 = 0 \text{ より} \right)$

$$C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} := \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f(a+2\pi n) = f(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \}$$

$$\Lambda^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} := \{ \omega \in \Lambda^1(\mathbb{R}) \mid \omega_{p+2\pi n} = \omega_p \quad \forall p \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z} \}$$

とおく（周期 2π）

このとき $d_0^{\mathbb{R}}(C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}) \subset \Lambda^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}$

$$\left(d_0^{\mathbb{R}} = d : C^\infty(\mathbb{R}) = \Lambda^0(\mathbb{R}) \to \Lambda^1(\mathbb{R}) \right)$$

$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} S^1$ により S^1 と $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ を同一視すると、

$$[\theta]_{2\pi\mathbb{Z}} \mapsto (\cos\theta, \sin\theta)$$

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(S^1) \arrow[r, "d_0"] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A^1(S^1) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} \arrow[r, "d_0^{\mathbb{R}}"'] & A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}
\end{tikzcd}$$

となる（いろいろ非自明）

定1 ① $\mathrm{Ker}\left(d_0^{\mathbb{R}} : C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} \to A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}\right) \cong \mathbb{R}$

② $A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} \Big/ \mathrm{Im}\left(d_0^{\mathbb{R}} : C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} \to A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}\right) \cong \mathbb{R}$

① について

Ex 11.2.5 の proof より $\mathrm{Ker}(d_0^{\mathbb{R}} : C^\infty(\mathbb{R}) \to A^1(\mathbb{R})) = \{$定数 on $\mathbb{R}\}$

よって $\mathrm{Ker}(d_0^{\mathbb{R}} : C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} \to A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}})$

$= \{$定数$\} \cap C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}$

$= \{$定数$\} \cong \mathbb{R}$.

② について

$I : A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}$, $\omega = g\,dx \mapsto \int_0^{2\pi} g\,dx$ とおく.

I は線型かつ全射. $\left(\because\ dx \in A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}\right.$ かつ $\left. I(dx) = 2\pi \neq 0 \right)$

準同型定理より $A^1(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}} / \mathrm{Ker}\, I \cong \mathbb{R}$

示 $\mathrm{Ker}\, I = d_0^{\mathbb{R}}\left(C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}\right)$

"$\subset$" を示す： $\omega = g\, dx \in \mathrm{Ker}\, I$ とする.

このとき $g \in C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}$ かつ $\int_0^{2\pi} g\, dx = 0$.

特に $\displaystyle\int_a^{a+2n\pi} g\, dx = 0 \quad (\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z})$.

従って $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $a \mapsto \int_0^a g\, dx$ とおくと $f \in \underbrace{C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}}_{\text{周期性}}$ かつ $f' = g$.

これより $d_0^{\mathbb{R}} f = \omega$.

"$\supset$" を示す: $^{\forall} f \in C^\infty(\mathbb{R})^{2\pi\mathbb{Z}}$ を fix

$=a$ とする

$$\begin{aligned}
I(d_0^{\mathbb{R}} f) &= I(f' dx) \\
&= \int_0^{2\pi} f' dx \\
&= f(2\pi) - f(0) \\
&= 0 \quad (\because f \text{ の周期性})
\end{aligned}$$

図

Section 11.3 : 外積と外微分 (講義では省略)

設定 : M : n次元 C^∞-mfd.

Thm 11.3.1 : $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\omega_1 \in A^{k_1}(M)$, $\omega_2 \in A^{k_2}(M)$ とする.

このとき

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^{k_1} \omega_1 \wedge d\omega_2$$

in $A^{k_1+k_2+1}(M)$

(Prop 11.1.3 の一般化)

以下，$H^*_{dR}(M) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} H^k_{dR}(M)$ とおく.

Thm 11.3.2：外積 $\wedge$ は $H^*_{dR}(M)$ 上の

結合的単位的 $\mathbb{R}$-alg str を定める

Hint：チェック項目：

① ω_1, ω_2 が closed (i.e. $d\omega_1 = 0$, $d\omega_2 = 0$) のとき

$\omega_1 \wedge \omega_2$ も closed

② $\omega_1, \eta_1, \omega_2, \eta_2$：closed とする.

$[\omega_1] = [\eta_1]$ かつ $[\omega_2] = [\eta_2]$ のとき

$[\omega_1 \wedge \omega_2] = [\eta_1 \wedge \eta_2]$

③ 1_M：$\Lambda^*(M)$ の単位元 は closed (easy)

Section 11.4 : 引き戻しと外微分

設定 : M_i : n_i 次元 C^∞-mfd. $(i=1,2)$

$\varphi : M_1 \to M_2$: C^∞ 級写像

Prop 11.4.1 : $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $p \in M$ とする.

(1) $\varphi_p^* : T^{(0,k)}_{\varphi(p)} M_2 \to T_p^{(0,k)} M_1$

$\alpha \mapsto ((d\varphi)_p^*)^{\otimes k} \alpha : (T_p M_1)^k \to \mathbb{R}$

$(v_1 \cdots v_k) \mapsto \alpha((d\varphi)_p(v_1), \cdots, (d\varphi)_p(v_k))$

は well-defined で 線型.

(2) $\varphi_p^*(\Lambda^k T_p^\vee M_2) \subset \Lambda^k T_p^\vee M_1$

Prop 11.4.2 :

各 $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について

(1) $\varphi^* : \Lambda^k(M_2) \to \Lambda^k(M_1)$

$$\omega \mapsto \underbrace{\varphi^* \omega}_{\text{ω の φ による引き戻し}} : M_1 \to T_p^{(0,k)} M$$

$$p \mapsto (p, \varphi_p^* \omega_p)$$

は well-defined で線型.

(2) $^\forall f \in C^\infty(M_2)$, $^\forall \omega \in \Lambda^k(M_2)$,

$$\varphi^*(f\omega) = \varphi^*(f) \cdot \varphi^*(\omega)$$

① 外微分について

Thm 11.4.3: $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $\forall \omega \in \Lambda^k(M_2)$,

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega) \quad \text{in } \Lambda^{k+1}(M_1)$$

$$M_2 \xleftarrow{\varphi} M_1 \quad : \quad \begin{tikzcd} \Lambda^k(M_2) \arrow[d, "d"] & \Lambda^k(M_1) \arrow[l, "\varphi^*"'] \arrow[d, "d"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ \Lambda^{k+1}(M_2) & \Lambda^{k+1}(M_1) \arrow[l, "\varphi^*"] \end{tikzcd}$$

Hint: Prop 11.1.5

◎ 外積について

<u>Recall</u> : $\Lambda^*(M_i) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} \Lambda^k(M_i)$: 単位的結合的 R 代数 w.r.t. 外積 (cf. Section 9.4)

Prop 11.4.4 :

φ^* の誘導する線型写像 $\Lambda^*(M_2) \to \Lambda^*(M_1)$

は外積を保つ. 特に R-代数準同型.

(この準同型も φ^* と書く)

Cor 11.4.5 :

(1) $\varphi^*_{dR} : H^k_{dR}(M_2) \to H^k_{dR}(M_1)$

$[\omega] \mapsto [\varphi^*\omega] \quad (\omega \in \mathrm{Ker}\, d_k)$

は well-defined で線型

(2) (Recall : $H^*_{dR}(M_i) := \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} H^k_{dR}(M_i)$: 単位的結合的 $\mathbb{R}$ 代数 w.r.t. 外積)

φ^*_{dR} の誘導する線型写像

$H^*_{dR}(M_2) \to H^*_{dR}(M_1)$

は $\mathbb{R}$ 代数準同型.