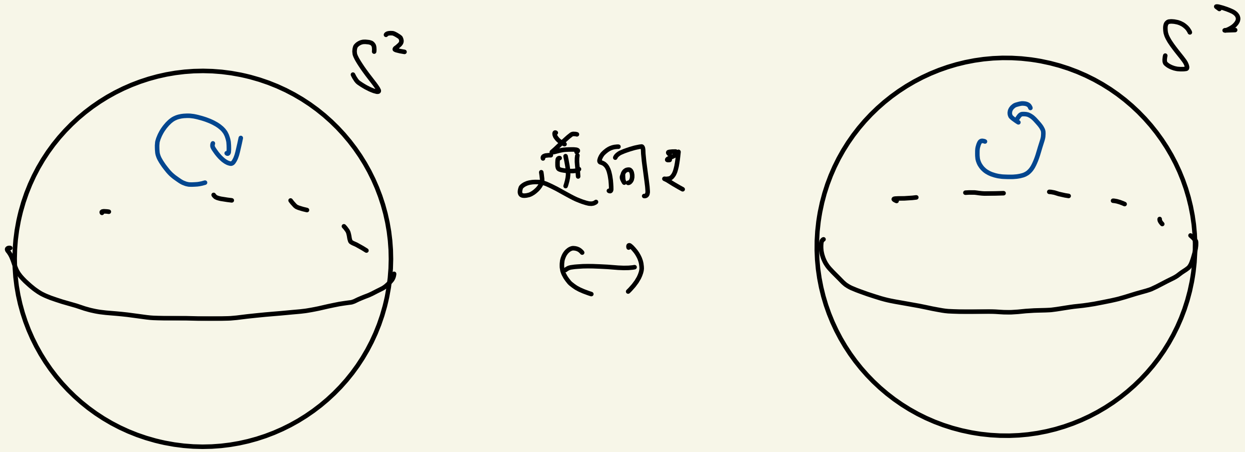
Section 12: 多様体の向き

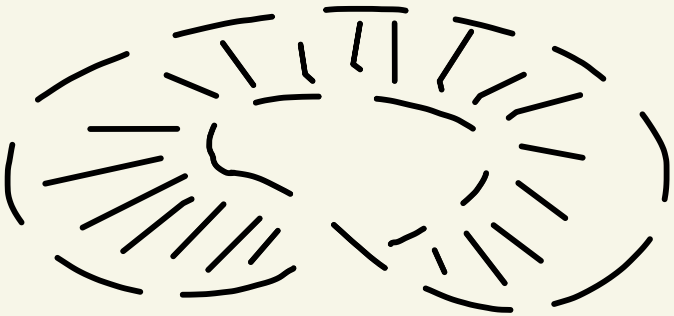
内容

- 接空間の向き
- 向き束
- 多様体上の向き
- 向きの分類

当面の目標: 向き付けられた n 次元多様体上で compactly supported n-form の積分を定める.



Möbiusの帯は



向き付け不可能な多様体

Q "向き"をどうやって定義する?

Section 12.1：接空間の向き

設定　M：n次元 C^∞-mfd
　　　$p \in M$

Def 12.1.1：$\Lambda^n T_pM \subset T_p^{(n,0)}M$ を

$$\Lambda^n T_pM := \{ \alpha \in T_p^{(n,0)}M = ML(T_p^\vee M, \cdots, T_p^\vee M ; \mathbb{R}) \mid \alpha \text{ は交代的 } \}$$

i.e. $\forall (\phi_1, \cdots, \phi_n) \in (T_p^\vee M)^n$, $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$

$\alpha(\phi_{\sigma(1)}, \cdots, \phi_{\sigma(n)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\,\alpha(\phi_1, \cdots, \phi_n)$

とおく。

Prop 12.1.2: $\Lambda^n T_pM$ は $T_p^{(n,0)}M$ の1次元部分空間$/\mathbb{R}$

また T_pM の ordered basis $v_1, \cdots, v_n$ について

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_n : (T_p^\vee M)^n \to \mathbb{R}$$
$$(\phi_1 \cdots \phi_n) \mapsto \det(\phi_j(v_i))_{i,j}$$

は $\Lambda^n T_pM$ の基底

Cor 12.1.3: $\Lambda^n T_pM \setminus \{0\}$ は2つの連結成分を持つ.

Def 12.1.4 $\mathrm{Ori}(T_pM) := \{\text{連結成分}\}$ of $\Lambda^n T_pM \setminus \{0\}$ とおく.

$(\# \mathrm{Ori}(T_pM) = 2)$

$\mathrm{Ori}(T_pM)$ の元を T_pM の向きと呼ぶ.

(cf Section 8.4)

また T_pM の各 ordered basis $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ について

$$\mathrm{ori}(\mathcal{B}) := \{\lambda v_1 \wedge \cdots \wedge v_n \mid \lambda > 0\} \in \mathrm{Ori}(T_pM)$$

を $\mathcal{B}$ の定める T_pM の向きという.

◎ $\mathrm{Ori}(T_pM)$ には 群 $\{\pm 1\}$ が自然に作用する.

$\left(\begin{array}{c} \| \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \end{array} \right)$

◎ $n = 0$ のとき $\bigwedge^n T_pM \underset{\text{canonical}}{\cong} \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ori}(T_pM) = \{\mathbb{R}_{>0}, \mathbb{R}_{<0}\}$

($T_pM = \{0\}$ の ordered basis $\emptyset$ について $\mathrm{Ori}(\emptyset) = \mathbb{R}_{>0}$)

◎ $n = 1$ のとき $\bigwedge^n T_pM \cong T_pM$ $\rightsquigarrow$ $\mathrm{Ori}(T_pM)$

$= \{ T_pM \setminus \{0\}$ の 連結成分 $\}$

Section 12.2：向き束

設定：$M = (M, \mathcal{A})$：n次元 C^∞-mfd

Def 12.2.1：集合 $\mathrm{Ori}(M)$ を

$$\mathrm{Ori}(M) := \bigsqcup_{p \in M} \underbrace{\mathrm{Ori}(T_pM)}_{\text{2点集合}}$$

$$= \{ (p, \xi) \mid p \in M,\ \xi \in \mathrm{Ori}(T_pM) \}$$

とおく。

また: 各 $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ について

$$\Phi_u : O \times \underbrace{\{\pm 1\}}_{\substack{\text{2点離散空間} \\ \text{(0次元多様体)}}} \longrightarrow \mathrm{Ori}(M)$$

$$(p, \varepsilon) \longmapsto \left(p,\ \varepsilon \cdot \mathrm{ori}\left(\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right\}\right)\right)$$

$$\mathrm{ori}\left(\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right\}\right) = \left\{ \varepsilon\lambda \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p \;\middle|\; \lambda > 0 \right\}$$

とおく.

Prop 12.2.3 : $\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$, Φ_u は単射

$$\operatorname{Im} \Phi_u = \bigsqcup_{p \in O} \operatorname{Ori}(T_pM)$$

Thm 12.2.4 :

$\operatorname{Ori}(M)$ の位相であって、

"$\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}$, $\bigsqcup_{p \in O} \operatorname{Ori}(T_pM)$: open in $\operatorname{Ori}(M)$

かつ $\Phi_u : O \times \{\pm 1\} \to \operatorname{Ori}(M)$

は中への同相"

とするものが一意に存在

($\rightsquigarrow$ 以下 $\operatorname{Ori}(M)$ をこの位相により

位相空間とみなす.

Prop 12.2.5.

$\mathrm{Ori}(M)$ は Hausdorff, 第二可算.

$\pi_{\mathrm{ori}} : \mathrm{Ori}(M) \to M$ は 2重被覆.
$(p, \xi) \mapsto p$

Thm 12.2.6. $\mathrm{Ori}(M)$ の n 次元 C^∞-atlas であって

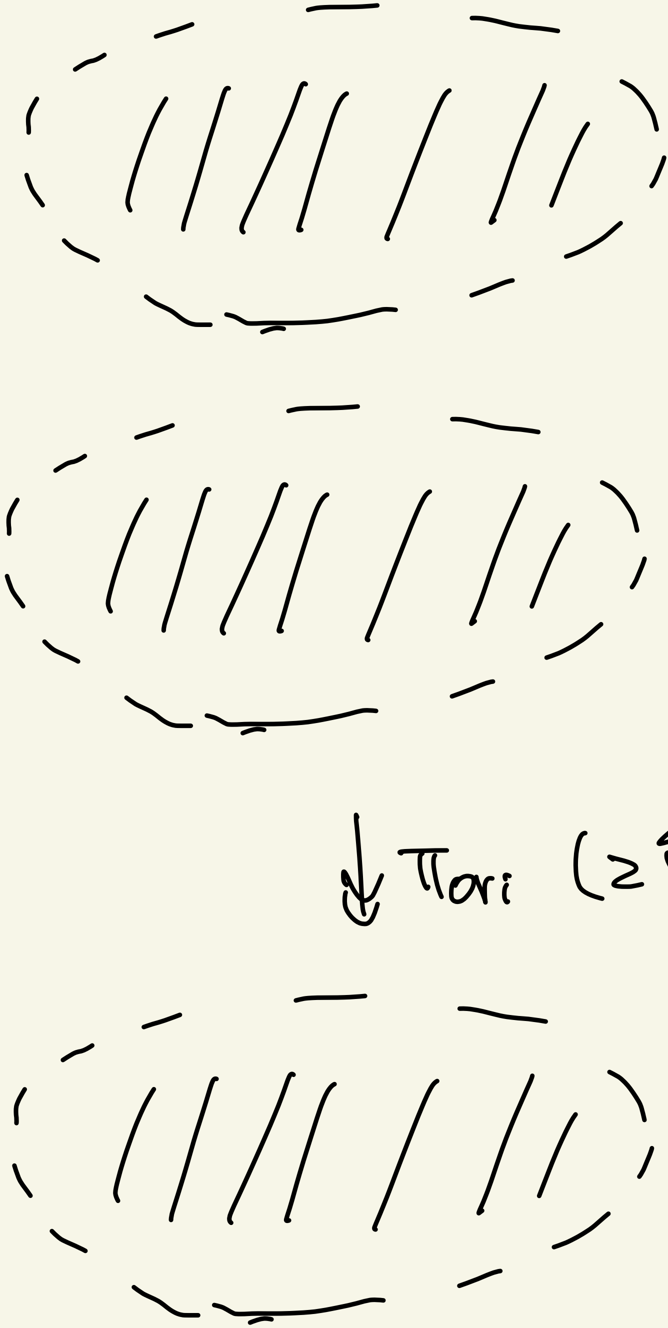
"$\forall (O, U, \mu) \in \mathcal{A}$, Φ_μ は φ への diffeo"

となるものが一意に存在

⇝ 以下, $\mathrm{Ori}(M)$ を n 次元 C^∞-mfd とみなす.

Ex 12.2.7:

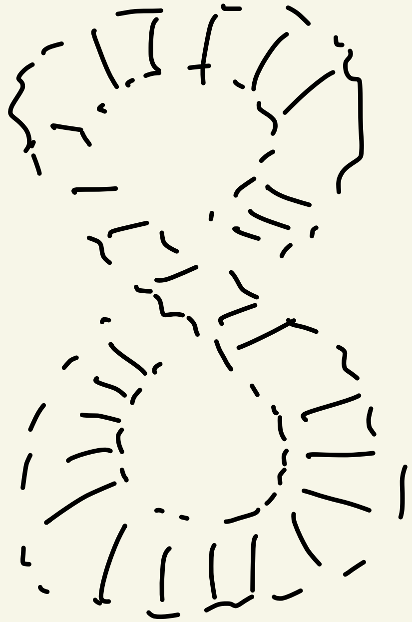
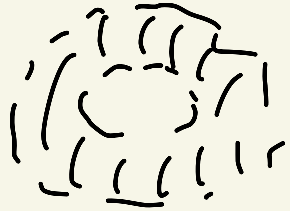
$\mathrm{Ori}(M)$



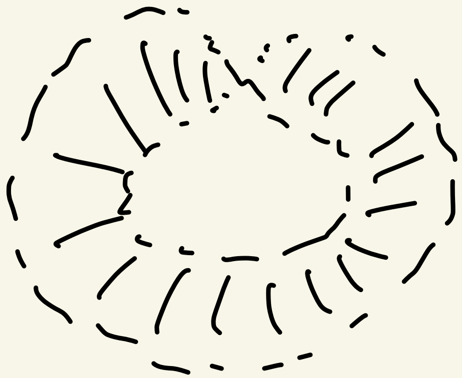
$\downarrow \pi_{ori}$ (2重セフり)

$M =$ open disk

Ex 12.2.8

$\mathrm{Ori}(M) =$  $\fallingdotseq$ 

$\big\downarrow \pi_{ori}$ (2重 c77)

$M =$  Möbius bundle

Section 12.3：多様体上の向きと適合するアトラス（1/25 に大幅に修正）

設定：$M = (M, \mathcal{A})$：n次元 C^∞-mfd

Def 12.3.1：• $\sigma : M \to \mathrm{Ori}(M)$ が M 上の向き

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\pi_{\mathrm{ori}} \circ \sigma = \mathrm{id}_M$ かつ

（i.e. 各 $p \in M$ について $\sigma(p) = (p, \sigma_p)$ と書ける
$\sigma_p \in \mathrm{Ori}(T_pM)$）

σ は C^∞ 級.

• M は向き付け $\begin{cases} \text{可能} \\ \text{不可能} \end{cases}$ $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ M 上の向きが $\begin{cases} \text{存在する} \\ \text{存在しない} \end{cases}$

Ex 12.3.2 : $S^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ について

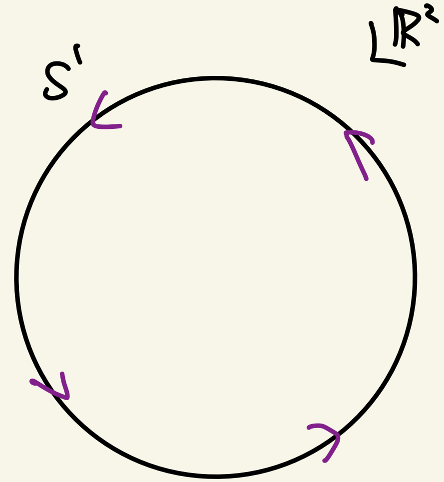
各 $p \in S^n$ において, T_pM の向き σ_p を以下で定める.

$T_pS^n \subset T_p\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$ とみなし,

T_pS^n の ordered basis $\{v_1, \dots, v_n\}$ であって

$\det(p\ v_1 \cdots v_n) > 0$ となるものを用いて

$\sigma_p := \mathrm{ori}(\{v_1, \dots, v_n\})$ とおく.



この σ_p は well-defined に定まる.

$\sigma : S^n \to \mathrm{Ori}(S^n),\ p \mapsto (p, \sigma_p)$ は S^n 上の向きを定める.

Def 12.3.3 : σ を M 上の向きとする. $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ とする.

ここでだけの用語

(1) $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ が σ と ε 適合する

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall p \in O, \quad \underbrace{\mathrm{ori}\left(\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u_n}\right)_p\right\}\right)}_{\text{座標基底の定める向き}} = \varepsilon \cdot \sigma_p$$

(2) $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}$ を C^∞-atlas とする.

$\mathcal{A}_0$ が σ と ε 適合する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \quad {}^\forall (O, U, u) \in \mathcal{A}_0$,

(O, U, u) は σ と ε 適合する.

Thm 12.3.4: σ を M 上の向きとする.

$\varepsilon \in \{\pm 1\}$ について

$$\mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)} := \{ (O, U, u) \in \mathcal{A} \mid (O, U, u) \text{ は } \sigma \text{ と } \varepsilon \text{ 適合する} \}$$

とおく.

このとき (1) $n \geq 1$ なら $\mathcal{A}^{(\sigma,+1)}, \mathcal{A}^{(\sigma,-1)}$ はそれぞれ C^∞-atlas on M.

(2) $n = 0$ のとき $\bigsqcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}$ は C^∞-atlas on M.

Hint: **Lemma 12.3.5:** $(O, U, u) \in \mathcal{A}$ で O: 弧状連結 なら

$$(O, U, u) \in \bigsqcup_{\varepsilon \in \{\pm 1\}} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}$$

⑨ アトラスを用いた向きの指定

Thm 12.3.6 : $A_0 \subset A$ が M 上の C^∞-atlas であり，以下の☆を満たすとする。

☆ $\forall (O, U, u), (O', V, v) \in A_0$

$\forall p \in O \cap O'$

$$\det(J\tau_{vu})_p > 0$$

(ただし 0×0 行列の det は常に 1 であると約束する)

このとき各 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ について

$$A_0 \subset A^{(\sigma, \varepsilon)} \quad (\subset A)$$

となる M 上の向き $\sigma = \sigma(A_0, \varepsilon)$ が一意に存在する。

Hint：（存在）

各点 $p \in M$ で

$\sigma_p := \varepsilon \cdot \mathrm{ori}\left(\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}\right)$ とおけばよい

（一意）明らかに上のものしかない

@ 向きの非存在について

Thm 12.3.4, Lem 12.3.5 から以下が分かる

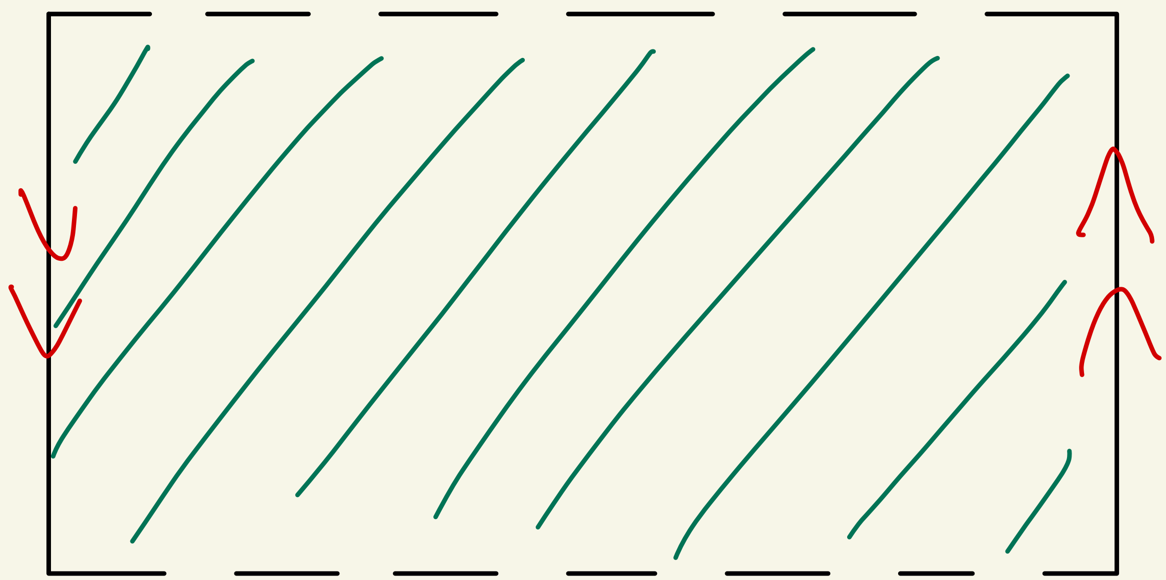
Thm 12.3.7: $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}$ であって

以下の条件を満たすものが存在するなら

M は向き付け不可能

条件 :
- O, O' は連結
- ${}^\exists p \in O \cap O'$, $\det(J\tau_{uv})_p > 0$
- ${}^\exists q \in O \cap O'$, $\det(J\tau_{vu})_p < 0$

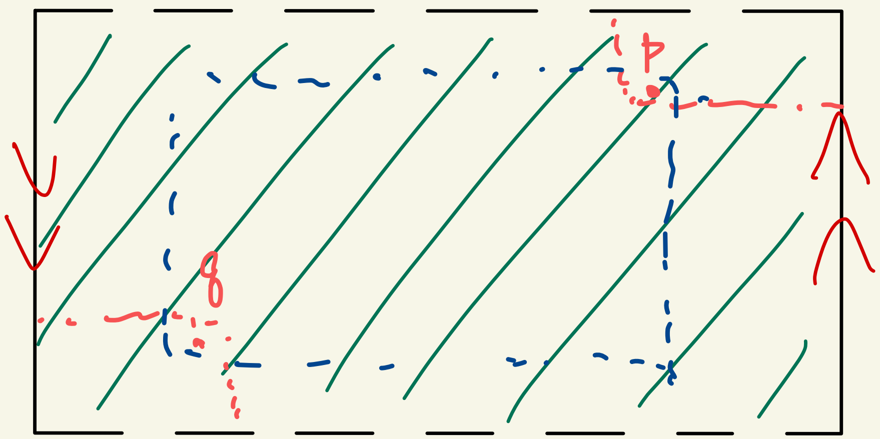
Ex 12.3.8　M = Möbius の帯 :=



とおく．

Claim: M 可向之向可不可能

Hint: Thm 12.3.6 之同法.



Section 12.4：向きの分類

設定：M：n次元 C^∞-mfd

記号：$\Gamma(\mathrm{Ori}(M)) := \{M$上の向き$\}$

Prop 12.4.1：Mの各連結成分は openな弧状連結成分 in M.

Thm 12.4.2：$M = \coprod_{i \in I} M_i$ を連結成分分解とすると

$$\Gamma(\mathrm{Ori}(M)) \cong \prod_{i \in I} \Gamma(\mathrm{Ori}(M_i))$$

向きは連結成分ごとに考えてよい.

Thm 12.4.3: M：連結とする.

(1) $\# P(\mathrm{Ori}(M)) = \begin{cases} 2 & (\text{if } \mathrm{Ori}(M) \text{ が非連結 } (\Leftrightarrow \text{連結成分2つ})) \\ 0 & (\text{if } \mathrm{Ori}(M) \text{ が連結}) \end{cases}$

(2) Mが単連結ならMは向き付け可能