Section 13 : 1 の分割

内容：

- 1 の分割の定義
- 1 の分割の存在定理

準備

当面の目標： 向き付けられた n 次元多様体上で compactly supported n-form の積分を定める

Recall: Cut-off 関数 (cf. Section 2) は

"局所的に定義できているものを全体に延長する"のに便利 (Thm 2.2.3 など)

1の分割 は更に進化して

"各点のまわりで定義されているものを貼り合わせて全体で定義する" のに便利

Section 13.1 : 位相空間上の1の分割

X : 位相空間

$\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: X の部分集合族とする.

Def. 13.1.1 : $\{C_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が局所有限 (locally finite)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x \in X$, $\exists V_x$: x の open nbd

s.t. $\Lambda(V_x) := \{\lambda\in\Lambda \mid C_\lambda \cap V_x \neq \emptyset\}$ が有限.

Def. 13.1.2

$\varphi : X \to \mathbb{R}$ について

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}}$$

X における閉包

$\mathcal{O}$: X の open cover とする.

Def 13.1.3 (1の分割)

X 上の連続関数の族 $\{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が

$\mathcal{O}$ に従う 1 の分割 (partition of unity subordinate to $\mathcal{O}$)

PUS to $\mathcal{O}$ と略す

$\overset{\text{def}}{\iff}$

(1) $\varphi_\lambda(x) \in [0,1]$ $({}^\forall\lambda, {}^\forall x)$

(2) ${}^\forall\lambda\in\Lambda, {}^\exists O\in\mathcal{O}$ s.t. $\mathrm{supp}\,\varphi_\lambda \subset O$

(3) $\{\mathrm{supp}\,\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は局所有限

(4) $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}\varphi_\lambda(x) = 1$ $({}^\forall x\in X)$ ((3)より左辺は有限和)

Ex 13.1.4

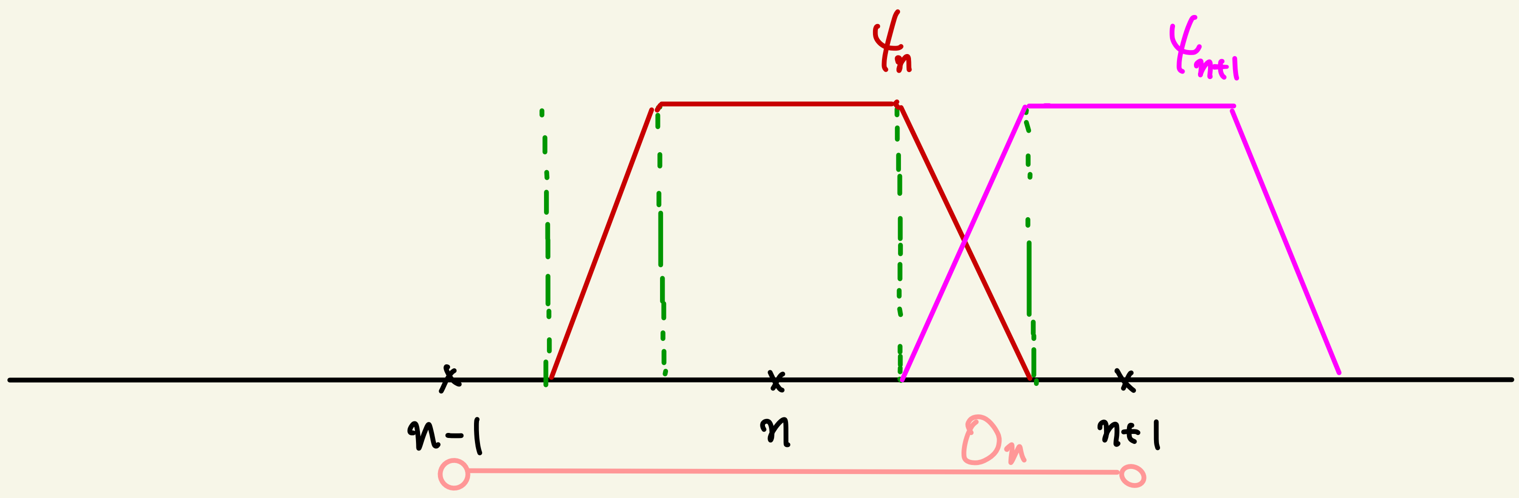
$X = \mathbb{R}$

$$\mathcal{O} = \{ O_n := (n-1,\ n+1) \}_{n \in \mathbb{Z}}$$ とする

$\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 1 & n - \frac{1}{3} \leq x \leq n + \frac{1}{3} \\ 3\left(x - \left(n - \frac{2}{3}\right)\right) & n - \frac{2}{3} \leq x < n - \frac{1}{3} \\ -3\left(x - \left(n + \frac{1}{3}\right)\right) + 1 & n + \frac{1}{3} < x \leq n + \frac{2}{3} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと PUS to $\mathcal{O}$.



定義が流儀によって異なるので注意

この講義では積分論が展開しやすい定義を採用した

別の流儀(主流はこちら)

Def. 13.1.5: $\{\varphi_O\}_{O\in\Theta}$ が"強い意味"で Θ に従う1の分割

$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

① $\varphi_O : X \to [0,1]$: 連続

② $\mathrm{supp}\,\varphi_O \subset O$

③ $\{\mathrm{supp}\,\varphi_O\}_{O\in\Theta}$ は局所有限

④ $\displaystyle\sum_{O\in\Theta} \varphi_O(x) = 1 \quad (\forall x \in X)$

Remark : Def 13.1.4 の意味の PUS to Θ から

選択公理を用いて Def 13.1.5 の意味の

PUS to Θ が構成できる.

応用例

Cor 13.1.6 : $\{\psi_\theta\}_{\theta\in\Theta}$: PUS to Θ in Def 13.1.5 とする.

$\{f_\theta : O \to \mathbb{R}_{>0}\}_{\theta\in\Theta}$: 正値連続関数の族に対して

$$f : X \to \mathbb{R},\quad x \mapsto \sum_{\theta\in\Theta} f_\theta(x)\cdot\psi_\theta(x)$$

は well-defined, 連続 かつ 正値.

この講義では用いないが以下の定理が成りたつ.

Theorem 13.1.7: X がパラコンパクトかつ Hausdorff とする.

このとき

$\forall \mathcal{O}$: X の open cover

$\exists \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$: PUS to $\mathcal{O}$

(X がパラコンパクト $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \mathcal{O}$: X の open cover

$\exists \mathcal{O}'$: X の locally finite open cover

s.t. $\forall O \in \mathcal{O}'$, $\exists \tilde{O} \in \mathcal{O}$ s.t. $O \subset \tilde{O}$)

Section 13.2: 多様体上の1の分割

M : n-dim'l C^∞-mfd とする.

このとき次の定理が成り立つ.

Theorem 13.2.1:

$^\forall \mathcal{O}$: M の open cover

$^\exists \{\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$: PUS to $\mathcal{O}$

s.t. $\varphi_\lambda \in C^\infty(M) \quad ({}^\forall \lambda \in \Lambda)$

この定理の証明には第二可算公理, Hausdorff性を用いる.

証明は付録ノートとしてアップロード予定.

Def 13.2.2： 位相空間 X が 第二可算公理 を満たす

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ X は可算開基を持つ

Thm 13.2.1 の証明のための Key lemma

Lemma 13.2.3： 位相空間 X が Hausdorff 局所コンパクト かつ 第二可算公理 を満たすとする。このとき X の

可算開被覆 $\mathcal{Z} = \{Z_k\}_{k=1,2,\cdots}$ であって

各 Z_k が X 内で相対コンパクトなものが

存在する。

Thm 13.2.1 の証明のアイデア

$\mathcal{O}$: M の open cover を fix.

"$\forall p \in M$, $\exists O \in \mathcal{O}$ s.t. $\mathrm{supp}\, b_p \subset O$"

(更にいくつかの条件を課す)

① 各点 $p \in M$ のまわりで $\mathrm{supp}\, b_p$ が十分小さい C^∞ 級 cut-off 関数 $b_p : M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を作る.

② $\{b_p\}_{p \in M}$ をうまく間引いて $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を作り

ここが大変 (Lemma 13.2.3 使う)

- $\{\mathrm{supp}\, b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ が局所有限
- $\forall p \in M$, $\exists \lambda \in \Lambda$ s.t. $b_\lambda(p) > 0$

となるようにする.

③ $h := \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \in C^\infty(M)$ とおくと $h(p) > 0$ ($\forall p$).

$\left\{ \psi_\lambda := \frac{b_\lambda}{h} \right\}_{\lambda \in \Lambda}$ とおけば ok.

詳しくは付録ノートで

応用例（この講義では使わない）

Theorem 13.2.4 任意の C^∞-mfd はリーマン計量を持つ.
特に距離化可能.

Hint：各座標で計量を定義しておいて,
Cor 13.1.6 と同じアイデアで
全体で貼り合わせる.