Section 14 : 微分形式の積分

設定 : $M := (M, \mathcal{A})$: n-mfd

σ : Ω 上の向き

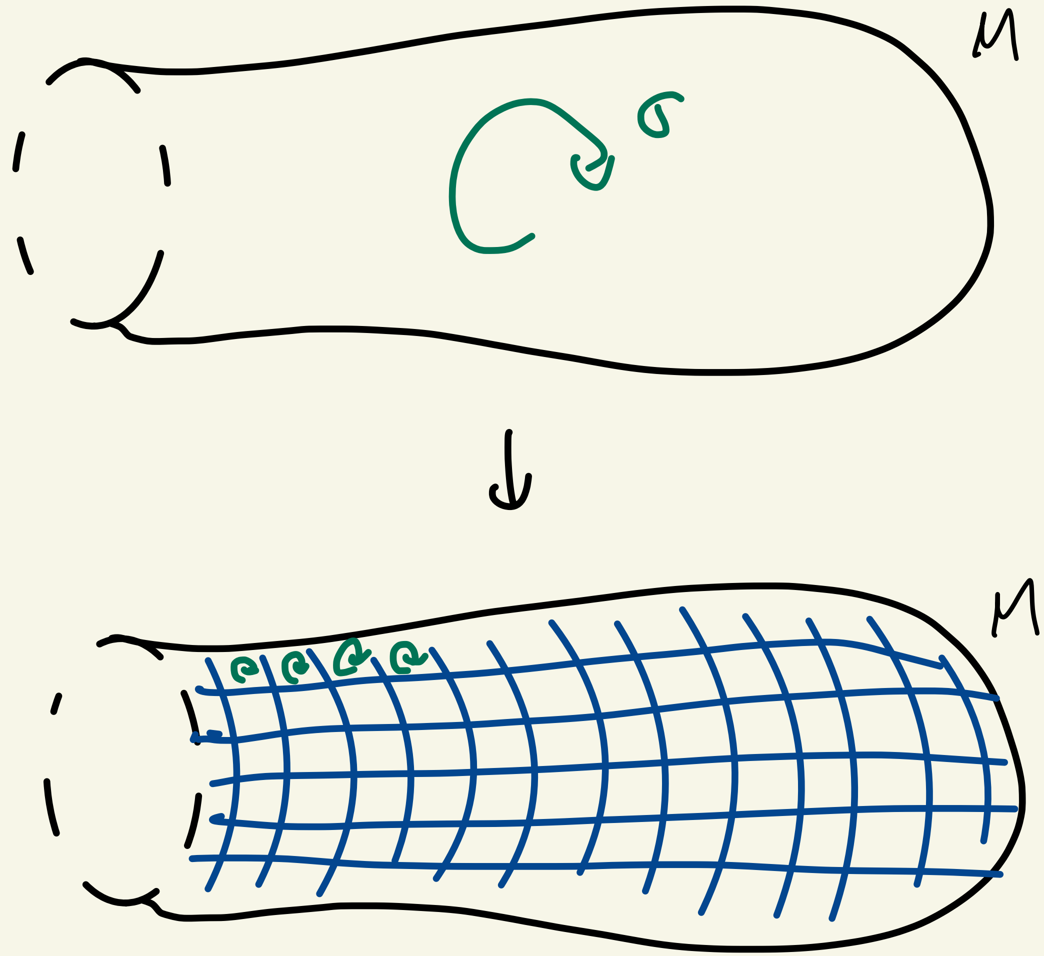
目標 : M 上のコンパクト台を持つ n-form ω について

積分 $\int_{(M,\sigma)} \omega \in \mathbb{R}$ を定める.

$\int_{(M,\sigma)} \omega$ の気持ち

向き付き 多様体

向き付き
微小平行四辺形
に"分割"



各微小平行四辺形を ω に"代入"して足しあげる

supp ω がコンパクトでないと有限和にならない

難点：M を微小平行四辺形で分割できる？

⇝ きれいに分割するのは無理.

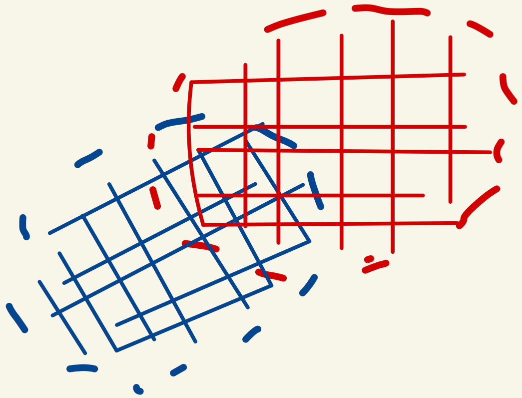
要因点：各局所座標上では分割できる.

（リーマン積分の本質）

M 全体では"1の分割"を用いて

各局所座標上の分割を

全体で"重ね合わせる".



Section 14.1 : コンパクト台を持つ微分形式

設定: $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd.

$l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 14.1.1 : 各 $\omega \in \Omega^l(M)$ について

$\mathrm{supp}\,\omega := \overline{\{ p \in M \mid \omega_p \neq 0 \}}$ ← M における閉包

Def 14.1.2 :

$\Omega^l_c(M) := \{ \omega \in \Omega^l(M) \mid \mathrm{supp}\,\omega$ はコンパクト $\}$

Prop 14.1.3 :

$\Omega^l_c(M)$ は $\Omega^l(M)$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

以下 $O \underset{\text{open}}{\subset} M$ とする.

Def 14.1.4

$\Omega_c^l(M; O) := \{ \omega \in \Omega_c^l(M) \mid \operatorname{supp} \omega \subset O \}$

Prop 14.1.5

$\Omega_c^l(M; O)$ は $\Omega_c^l(M)$ の部分 $C^\infty(M)$ 加群

以下の命題は後で使う

Prop 14.1.6 各 $\omega \in \Omega_c^l(M;O)$ について

M における support

O における support

$$\operatorname{supp}(\omega|_O) = \operatorname{supp}\omega$$

特に $\Omega_c^l(M;O) \to \Omega_c^l(O)$, $\omega \mapsto \omega|_O$ は well-defined

Hint: M の Hausdorff 性を使う

Section 14.2 : $\mathbb{R}^n$ 上のリーマン積分

$\mathbb{R}^n$ の開集合上の関数のリーマン積分の記号を設定しておく.

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

U : $\mathbb{R}^n$ の開集合

$\varepsilon_U \in \{\pm 1\}$

記号 :

$C_c(U) := \{ f \in C(U) \mid \mathrm{supp} f : \text{コンパクト} \}$

: U 上でコンパクト台を持つ連続関数全体のなすベクトル空間

Fact 14.2.1 : $\forall f \in C_c(U)$, f は U 上リーマン可積分

Def 14.2.2 :

$$I_{(U,\varepsilon_U)} : C_c(U) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto \varepsilon_U \cdot (f \text{ の } U \text{ 上のリーマン積分})$$

$\{\pm 1\}$

(累次積分 = 重積分 = ルベーグ積分)

Prop 14.2.3 : $I_{(U,\varepsilon_U)} : C_c(U) \to \mathbb{R}$ は線型写像

① 変数変換について

設定： $\underset{\neq\emptyset}{U_1}, \underset{\neq\emptyset}{U_2} \subset \mathbb{R}^n$ open, $\varepsilon_{U_1}, \varepsilon_{U_2} \in \{\pm 1\}$

$\tau : U_1 \to U_2$ ： C^∞級同相

s.t. $\varepsilon_{U_1} \cdot \varepsilon_{U_2} \cdot \det(J\tau)_u > 0 \quad (\forall u \in U_1)$

Fact 14.2.4（変数変換公式）

$\forall f \in C_c(U_2)$

$$I_{(U_1, \varepsilon_{U_1})}\left(\tau^* f \cdot \det(J\tau)\right) = I_{(U_2, \varepsilon_{U_2})}(f)$$

$\det(J\tau) \in C^\infty(U_1)$

$\tau^* f$：f の τ による引き戻し

Section 14.3 : 局所座標上の微分形式の積分

設定 : $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd

σ : M 上の向き

$(O, U, u) \in \coprod_{\varepsilon = \pm 1} \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon)}$

記号 : $\varepsilon_u^\sigma \in \{\pm 1\}$ s.t. $(O, U, u) \in \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon_u)}$

目標 : $\int_{(O, \varepsilon_u^\sigma)} : \Omega_c^n (\Omega ; O) \to \mathbb{R},\ \omega \mapsto \int_{(O, \varepsilon_u^\sigma)} \omega$

を定めたい.

Prop 14.3.1 : 各 $\omega \in \mathcal{A}_c^n(M;O)$ について

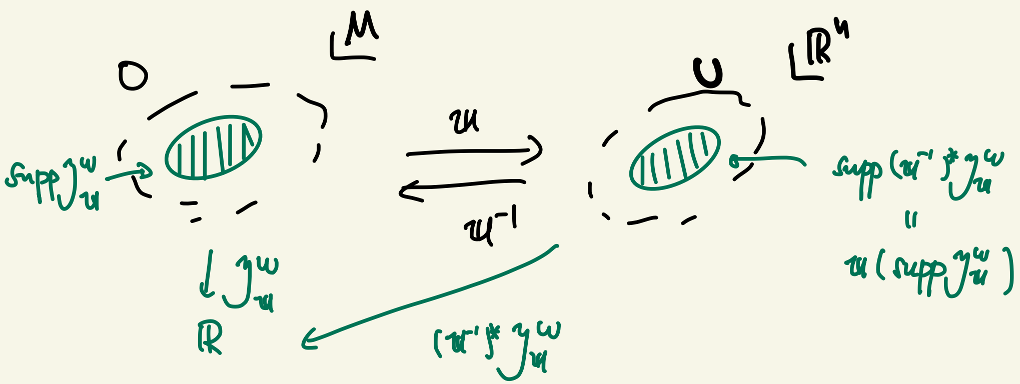
$\exists!\, g_u^\omega \in C_c^\infty(O)$ s.t. $\begin{cases} \omega|_O = g_u^\omega \cdot du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \\ \operatorname{supp} g_u^\omega = \operatorname{supp}(\omega|_O) = \operatorname{supp}\omega \end{cases}$

Hint : Prop 14.1.6

Observation 14.3.2 : 上の設定で

$(u^{-1})^* g_u^\omega \in C_c^\infty(U)$ かつ $\operatorname{supp}((u^{-1})^* g_u^\omega) = u(\operatorname{supp}\omega)$

$u^{-1}: U \to O$ に移り戻し



Def 14.3.2

$$\int_{(O,\,\varepsilon_M^\sigma)} : \Lambda_c^n(M;O) \to \mathbb{R}$$

$$\omega \mapsto I_{(U,\,\varepsilon_M^\sigma)}\left((\varphi^{-1})^* j_\varphi^\omega \right)$$

$C_c^\infty(U) \subset C_c(U)$

の元

Prop 14.3.3

$\int_{(O,\,\varepsilon_M^\sigma)} : \Lambda_c^n(M;O) \to \mathbb{R}$ は線型写像

次の命題は後で使う

Prop 14.3.4: $(O, U, u), (O', V, v) \in \bigsqcup_{\varepsilon = \pm 1} \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon)}$

with $O \cap O' \neq \emptyset$

$\omega \in \mathcal{A}^n_c(M; O \cap O')$ とする.

このとき

$$\int_{(O, \varepsilon^\sigma_u)} \omega = \int_{(O', \varepsilon^\sigma_v)} \omega .$$

(どの局所座標で積分しても同じ)

Hint: Fact 14.2.4 (変数変換公式), Cor 10.3.9.

Section 14.4 : 多様体上の微分形式の積分

設定: $M = (M, \mathcal{A})$: n-mfd.

σ : M の向き

目標: $\int_{(M,\sigma)} : \Omega^n_c(M) \to \mathbb{R}$, $\omega \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$ を定める.

Theorem 14.4.1 (微分形式の積分)

線型写像 $\displaystyle \int_{(M,\sigma)} : \Lambda_c^n(M) \to \mathbb{R}$

$$\omega \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$$

ω の (M,σ) 上の積分

であって、以下の条件★を満たすものが一意に存在する：

条件★：$^\forall(O,U,u) \in \bigsqcup_{\varepsilon=\pm1} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}$，$^\forall\omega \in \Lambda_c^n(M;O) \subset \Lambda_c^k(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \underline{\int_{(O,\varepsilon_u^\sigma)} \omega}$$

Def 14.3.2

この定理の証明がこの節のゴール．

Thm 14.4.1 を示すため、命題を準備しておく.

準備の設定

$\mathcal{O} := \{ O \}_{(O,U,u) \in \bigsqcup_{\varepsilon = \mathrm{I}} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}}$ とおくと,

$\mathcal{O}$ は M の open cover.

$\{ \psi_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$ を PUS to $\mathcal{O}$ で $\psi_\lambda \in C^\infty(M)$ $(\forall \lambda)$ となる

ものを任意に fix (Thm 13.2.1 より存在が保障される)

各 $\lambda \in \Lambda$ について $\operatorname{supp} \psi_\lambda \subset O_\lambda$ となる

$(O_\lambda, U_\lambda, u_\lambda) \in \bigsqcup_{\varepsilon = \mathrm{I}} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}$ を fix

$(O_\lambda \in \mathcal{O})$ (選択公理を使った)

Prop 14.4.2:

代数的直和

写像 $\Xi : \Lambda^n_c(M) \to \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} \Lambda^n_c(M ; O_\lambda)$

$\omega \longmapsto (\psi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda \in \Lambda}$

有限個の成分を除いて 0

は well-defined かつ 単射線型写像

Cor 14.4.3: $\forall \omega \in \Lambda^n_c(M)$,

support が局所座標に収まるように ω を有限個に分割できる.

$\exists N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \exists (O_l, U_l, \mathcal{U}_l) \in \coprod_{\varepsilon = \pm 1} \mathcal{A}^{(\sigma, \varepsilon)}, \exists \omega_l \in \Lambda^n_c(M ; O_l)$

$(l = 1, \cdots, N)$

s.t. $\omega = \sum_{l=1}^{N} \omega_l$

Proof of Prop 14.4.2

示 ① Ξ は well-defined

② Ξ は線型

③ Ξ は単射

① を示す：$^\forall \omega \in A_c^n(M)$ をとる.

示 (i) $(\varphi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda \in \Lambda}$ は有限個の成分を除いてゼロ

(ii) $^\forall \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega)$ はコンパクトで $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega) \subset O_\lambda$

まず各 $\lambda \in \Lambda$ について

$$\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega) \subset \mathrm{supp}\,\varphi_\lambda \cap \mathrm{supp}\,\omega$$

に注意.

(i) $(\varphi_\lambda \cdot \omega)_{\lambda\in\Lambda}$ は有限個の成分を除いてゼロを示す.

$$\Lambda(\mathrm{supp}\,\omega) := \{\lambda\in\Lambda \mid \mathrm{supp}\,\varphi_\lambda \cap \mathrm{supp}\,\omega \neq \emptyset\}$$

とおく.

$\mathrm{supp}\,\varphi_\lambda\cdot\omega \subset \mathrm{supp}\,\varphi_\lambda \cap \mathrm{supp}\,\omega$ $(\forall\lambda)$ より

$\Lambda(\mathrm{supp}\,\omega)$ が有限集合であることを示せばよい.

いま $\{\mathrm{supp}\,\varphi_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が locally finite で

$\mathrm{supp}\,\omega$ がコンパクトであることから

ギロン必要

$\Lambda(\mathrm{supp}\,\omega)$ は有限でなければならないことがわかる.

(i) が示された.

(ii) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega)$ はコンパクトで $\mathrm{supp}(\varphi_\lambda \cdot \omega) \subset O_\lambda$ を示す.

$\forall \lambda \in \Lambda$ をとる.

$$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cdot \omega \subset \underbrace{\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda}_{\subset O_\lambda} \cap \underbrace{\mathrm{supp}\, \omega}_{\text{コンパクト}} \subset O_\lambda$$

であり, $\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cap \mathrm{supp}\, \omega$ は M のコンパクト閉集合,

$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cdot \omega$ は M の閉集合なので

$\mathrm{supp}\, \varphi_\lambda \cdot \omega$ はコンパクト.

(ii) が示された.

② Ξ の線型性は省略(簡単)

③ Ξ の単射性を示す：

(示) $\operatorname{Ker}\Xi = 0$

i.e. $\forall \omega \in \Omega_c^n(M)$ with $\psi_\lambda \cdot \omega = 0 \ (\forall \lambda)$,

$\omega = 0$.

$\forall \omega \in \Omega_c^n(M)$ with $\psi_\lambda \cdot \omega = 0 \ (\forall \lambda)$ をとる.

(示) $\omega = 0$

i.e. $\forall p \in M, \ \omega_p = 0$.

$\forall p \in \Omega$ をとる.

示. $\omega_p = 0$

$\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p) = 1$ に注意すると

$$\omega_p = \Big(\underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda} \psi_\lambda(p)}_{=1}\Big) \cdot \omega_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda \cdot \omega)_p$$

ここで 各 $\lambda \in \Lambda$ について $\psi_\lambda \cdot \omega = 0$ より

特に $(\psi_\lambda \cdot \omega)_p = 0$

従って $\omega_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} (\psi_\lambda \cdot \omega)_p = 0$.

③ が示された.

Theorem 14.4.1 (微分形式の積分) 再掲

線型写像 $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda_c^n(M) \to \mathbb{R}$
$\omega \mapsto \int_{(M,\sigma)} \omega$

ωの(M,σ)上の積分

であって、以下の条件★を満たすものがただ一意に存在する:

条件★: $^\forall (O,U,u) \in \bigsqcup_{\varepsilon=\pm 1} A^{(\sigma,\varepsilon)}$, $^\forall \omega \in \Lambda_c^n(M;O) \subset \Lambda_c^k(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \int_{(O,\varepsilon_u^\sigma)} \omega$$

Def 14.3.2

Proof of Thm 14.4.1:

① 存在

② 一意性

① 存在を示す：

線型写像 $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda_c^n(M) \to \mathbb{R}$ を

次の線型写像の合成として定義する.

$$\Lambda_c(M) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} \Lambda_c(M;O_\lambda) \xrightarrow{\bigoplus_\lambda \int_{(O_\lambda,\varphi^\sigma_{u_\lambda})}} \bigoplus_{\lambda\in\Lambda}\mathbb{R} \xrightarrow{\text{和}} \mathbb{R}$$

㊡ 上記の $\int_{(M,\sigma)} : \Lambda_c^n(M) \to \mathbb{R}$ は ⊛ を満たす.

i.e. $\forall (O,U,u) \in \coprod_{\varepsilon=\pm1} A^{(\sigma,\varepsilon)}, \forall \omega \in \Lambda_c^n(M;O) \subset \Lambda_c^n(M)$

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \int_{(O,\varepsilon_u^\sigma)} \omega$$

$^\forall(O, U, \mathfrak{u}) \in \bigsqcup_{\varepsilon} A^{(\sigma,\varepsilon)}$　$^\forall \omega \in \Lambda^n_c(M; O)$ をとる.

(示) $$\int_{(M,\sigma)} \omega = \int_{(O, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}})} \omega$$

各 $\lambda \in \Lambda$ について $\operatorname{supp} \varphi_\lambda \cdot \omega \subset \operatorname{supp} \varphi_\lambda \cap \operatorname{supp} \omega \subset O_\lambda \cap O$.

Prop 14.3.4 より $$\int_{(O_\lambda, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}_\lambda})} (\varphi_\lambda \cdot \omega) = \int_{(O, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}})} (\varphi_\lambda \cdot \omega)$$

となることに注意すると

$$\text{左辺} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \int_{(O_\lambda, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}_\lambda})} (\varphi_\lambda \cdot \omega) = \underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda}}_{\text{有限和}} \int_{(O, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}})} (\varphi_\lambda \cdot \omega)$$

$$= \int_{(O, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}})} (\underbrace{\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda}_{=1}) \cdot \omega = \int_{(O, \varepsilon^\sigma_{\mathfrak{u}})} \omega = \text{右辺}$$

① が示された.

② 一意性を示す：

線型写像 $S : \Omega^n_c(M) \to \mathbb{R}$ が以下（☆☆）を満たすとする：

（☆☆） $\forall (O, U, u) \in \bigsqcup_{\varepsilon} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}$, $\forall \omega \in \Omega^n_c(M; O)$, $S(\omega) = 0$.

以下を示せば十分

（示） $S = 0$

i.e. $\forall \omega \in \Omega^n_c(M)$, $S(\omega) = 0$.

$\forall \omega \in \Omega^n_c(M)$ をとる.

（示） $S(\omega) = 0$.

Cor 14.4.3 より,

ある $(O_l, U_l, \mathcal{U}_l) \in \coprod_{\varepsilon} A^{(\sigma,\varepsilon)}$, $\omega_l \in \Lambda^n_c(M ; O_l)$ $(l = 1, \cdots, N)$

を用いて $\omega = \sum_{l=1}^{N} \omega_l$ と書ける.

$$
\begin{aligned}
S(\omega) &= S\left(\sum_{l=1}^{N} \omega_l\right) \\
&= \sum_{l=1}^{N} S(\omega_l) && (\because S\text{の線型性}) \\
&= 0 && (\because ☆☆)
\end{aligned}
$$

② が示された.

∎

Rem : $\omega \in \Lambda_c^n(M)$ について

Cor 14.4.3 の $\{(O_\ell, U_\ell, u_\ell) \in \bigsqcup_{\varepsilon=\pm 1} \mathcal{A}^{(\sigma,\varepsilon)}\}_{\ell=1,2,\cdots N}$

$\{\omega_\ell \in \Lambda_c^n(M; O_\ell)\}_{\ell=1,2,\cdots N}$

with $\omega = \sum_\ell \omega_\ell$ を fix すると,

$$\int_{(M,\sigma)} \omega = \sum_{\ell=1}^{N} \int_{(O_\ell, \varepsilon_{u_\ell}^\sigma)} \omega_\ell .$$

(これを定義と思ってもよい)