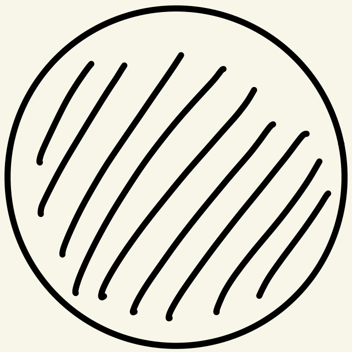
§15：境界付き多様体とその境界

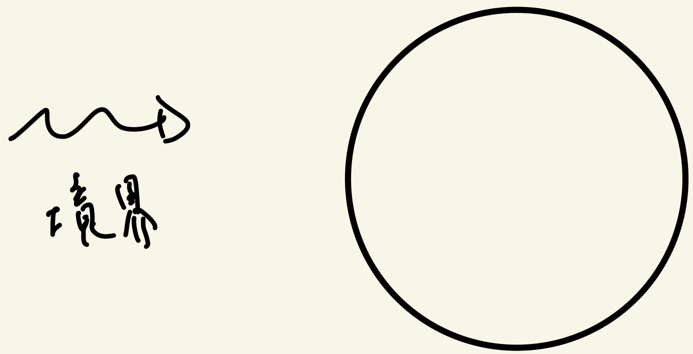
- 境界付き多様体
- 境界
- 境界に誘導される向き

目標：Stokes' theorem

：通常の意味の多様体



："境界付き多様体"

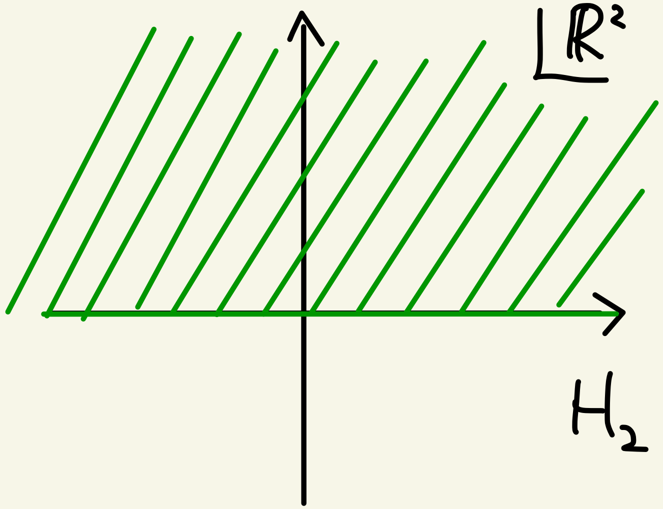


Section 15.1 : 境界における解析

設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

Def 15.1.1. $H_n := \{ x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$

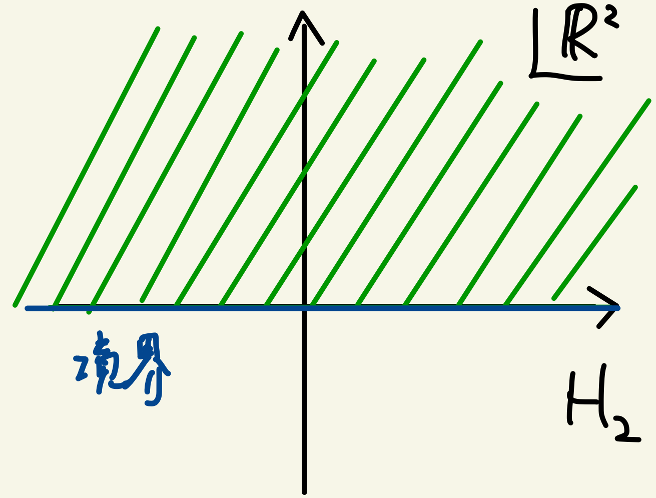
とおく



Rem : $H_0 = \mathbb{R}^0 = \{0\}$

Q："境界"における

微分の議論はどうなる？



A："C^∞級関数"の定義による.　← "何をやりたいか？"に依存する.

この講義では

"微分の議論"が通常の場合とほぼ同じになるように

"C^∞級関数"を定める.

この講義では"ストークスの定理"をやりたい.

Def 15.1.2 : $U \underset{\text{open}}{\subset} H_n$ について

$f : U \to \mathbb{R}$ が C^∞ 級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$: open, $\exists \tilde{f} \in C^\infty(\tilde{U})$

s.t. $U = \tilde{U} \cap H_n$, $f = \tilde{f}|_U$

($\mathbb{R}^n$ の open set 上の C^∞ 級関数に延長可能)

Def 15.1.3 各 $U \underset{\text{open}}{\subset} H_n$ について

$C^\infty(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f$ は C^∞ 級 $\}$

Prop 15.1.4 各 $U \underset{\text{open}}{\subset} H_n$ について

$C^\infty(U)$ は 自然な 和, スカラー倍, 積 について

(結合, 可換, 単位的) $\mathbb{R}$ 代数

Def 15.1.5 $k, l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $D_k = \mathbb{R}^k$ or H_k, $D'_l = \mathbb{R}^l$ or H_l とする.

$U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$, $V \underset{\text{open}}{\subset} D'_l$ について

写像 $\tau : U \to V$ が C^∞ 級

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tau^*(C^\infty(V)) \subset C^\infty(U)$

(ただし $f \in C^\infty(V)$ について
$\tau^* f : U \to \mathbb{R}$, $u \mapsto f(\tau(u))$)

$$\tau^* f = f \circ \tau$$

Prop 15.1.6 $k, \ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. $D_k = \mathbb{R}^k$ or H_k, $D'_\ell = \mathbb{R}^\ell$ or H_ℓ とする.

$U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$, $V \underset{\text{open}}{\subset} D'_\ell$, 写像 $\tau : U \to V$ について

以下は同値

(i) τ は Def.15.1.5 の意味で C^∞ 級 ($\tau^*(C^\infty(V)) \subset C^\infty(U)$)

(ii) $\tau(u) = (\tau_1(u), \cdots, \tau_\ell(u))$ $(u \in U)$

と書いたとき, $\tau_1, \cdots, \tau_\ell \in C^\infty(U)$

Def 15.1.3

Proof of Prop 15.1.6 (講義では略)

まず (i) を仮定して (ii) を示す. $^\forall i \in \{1,\dots,n\}$ をとる. ㊙ $\tau_i \in C^\infty(U)$

$v_i : V \to \mathbb{R},\ v \mapsto v_i$ (記号の乱用)

とおくと $v_i \in C^\infty(V)$.

(i) より $\tau^* v_i \in C^\infty(U)$ であれば, 定義より $\tau_i = \varphi^* v_i$.

(ii) が示された.

次に (ii) を仮定して (i) を示す.

$^\forall f \in C^\infty(V)$ をとる. ㊙ $\tau^* f \in C^\infty(U)$

i.e. $^\exists \hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k,\ ^\exists h \in C^\infty(\hat{U})$ s.t.

$U = \hat{U} \cap D_k,\ \tau^* f = h|_U$

いま $\tau_1, \cdots, \tau_n \in C^\infty(U)$ より

各 i について $\exists \tilde{U}_i \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\exists \tilde{\tau}_i \in C^\infty(\tilde{U})$

s.t. $U = \tilde{U}_i \cap D_k$, $\tau = \tilde{\tau}_i|_U$

また $f \in C^\infty(V)$ より $\exists \hat{V} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^l$, $\exists \tilde{f} \in C^\infty(\hat{V})$ s.t.

$V = \hat{V} \cap D_k$, $f = \tilde{f}|_V$.

$\tilde{\tau} : \bigcap_i \tilde{U}_i \to \mathbb{R}^l$, $u \mapsto (\tilde{\tau}_1(u), \cdots, \tilde{\tau}_n(u))$ とおく.

$\hat{U} := \bigcap_i \tilde{U}_i \cap \tilde{\tau}^{-1}(\hat{V})$ とおくと

$\tilde{\tau}$ は $\hat{U}$ から $\hat{V}$ への C^∞ 級写像. 特に $\tilde{\tau}^* \tilde{f} \in C^\infty(\hat{U})$.

$\mathbb{R}^k$ の open　　$\mathbb{R}^l$ の open

$h = \tilde{\tau}^* \tilde{f}$ とおけばよい.

■

Def 15.1.7（方向微分）　$k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $U \underset{\text{open}}{\subset} H_k$ とする.

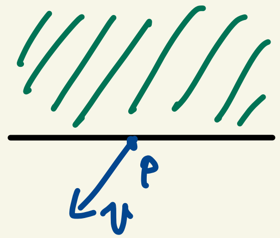
$p \in U$, $v \in \mathbb{R}^k$, $f \in C^\infty(U)$ に対し,

$$v_p(f) := v_p(\hat{f}) := \lim_{t \to 0} \frac{\hat{f}(p+tv) - \hat{f}(p)}{t} \in \mathbb{R}$$

とおく.

f の p における v 方向微分

拡張しておかないと定義域からはみでる.



ただし, $\hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\hat{f} \in C^\infty(\hat{U})$ with $U = \hat{U} \cap D_k$

$f = \hat{f}|_U$

とする.

Prop 15.1.8 方向微分は well-defined.

（$\hat{f}$ の選び方によらない）

Proof of Prop 15.1.8 (講義では略)

$p \in U$, $v \in \mathbb{R}^k$, $f \in C^\infty(U)$ を fix.

$\tilde{U}_1, \tilde{U}_2 \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$, $\hat{\tilde{f}}_1 \in C^\infty(\hat{\tilde{U}}_1)$, $\hat{\tilde{f}}_2 \in C^\infty(\hat{\tilde{U}}_2)$

with $U = \tilde{U}_1 \cap H_k = \tilde{U}_2 \cap H_k$

$f = \hat{\tilde{f}}_1|_U = \hat{\tilde{f}}_2|_U$ をとる.

示. $v_p(\hat{\tilde{f}}_1) = v_p(\hat{\tilde{f}}_2)$

$v = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ と書く.

このとき $v_p(\hat{f}_k) = \sum_{i=1}^{n} a_i ((e_i)_p(\hat{f}_k)) = \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial \hat{f}_k}{\partial u_i}(p)$

$(k=1,2)$

従って以下を示せば十分

㊬ $\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial u_i}(p) = \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial u_i}(p) \quad (\forall i)$

いま $\hat{f}_k|_U = f$, $U = \hat{U} \cap H_k$ であり

各 i について $p + te_i \in H_k \ (\forall t \in \mathbb{R}_{\geq 0})$ に注意すると,

$$\frac{\partial \hat{f}_k}{\partial u_i}(p) := \lim_{t \to 0} \frac{\hat{f}_k(p+te_i) - \hat{f}_k(p)}{t} = \lim_{t \to +0} \frac{f(p+te_i) - f(p)}{t}$$

← k に依存しない

よって $\frac{\partial \hat{f}_1}{\partial u_i}(p) = \frac{\partial \hat{f}_2}{\partial u_i}(p) \quad (\forall i)$ ▨

Def 15.1.9. $p \in U \underset{\text{open}}{\subset} H_k$ とする.

$T_pU := \{ g : C^\infty(U) \to \mathbb{R} \mid g$ は線型かつ
p におけるライプニッツ則を満たす$\}$
$\left(\text{i.e. } \forall f, h \in C^\infty(U), \; g(f \cdot h) = g(f) \cdot h(p) + f(p) \cdot g(h) \right)$

とおく.

Prop 15.1.10: T_pU は自然な和とスカラー倍についてベクトル空間となる.

Theorem 15.1.11

$p \in U \underset{\text{open}}{\subset} D_k$ とする.

$$\varphi : \mathbb{R}^k \to T_p U$$
$$v \longmapsto v_p$$

は well-defined かつ線型同型

Proof of Thm 15.1.11 : (講義では略)

φ の well-defined 性, 線型性の証明は省略

← (Prop 12.1.8 を用いる)

示 $\varphi : \mathbb{R}^k \to T_pU$ は全単射

以下の3つの命題から直ちに従う

以下, $\hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$ with $U = \hat{U} \cap H_k$ を固定する.

Prop 15.1.12 : $\gamma : T_pU \to T_p\hat{U}$, $v \mapsto v \circ \mathrm{rest}^{\hat{U}}_U$

(ただし, $\mathrm{rest}^{\hat{U}}_U : C^\infty(\hat{U}) \to C^\infty(U)$, $f \mapsto f|_U$)

は well-defined かつ単射線型写像

(Hint : Cut-off 関数使う)

Prop 15.1.13 $\Psi_{p,\hat{U}} : \mathbb{R}^k \to T_p\hat{U}$ $\quad$ ($\hat{U} \underset{\text{open}}{\subset} \mathbb{R}^k$)

$v \mapsto v_p : C^\infty(\hat{U}) \to \mathbb{R}$

(p における v 方向微分)

とすると $\Psi_{p,\hat{U}}$ は全単射線型写像

Prop 15.1.14 $\Psi_{p,\hat{U}} = \gamma \circ \varphi$

$$\begin{tikzcd} & T_pU \arrow[d] \\ \mathbb{R}^k \arrow[ur] \arrow[r, "\cong"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & T_p\hat{U} \end{tikzcd}$$

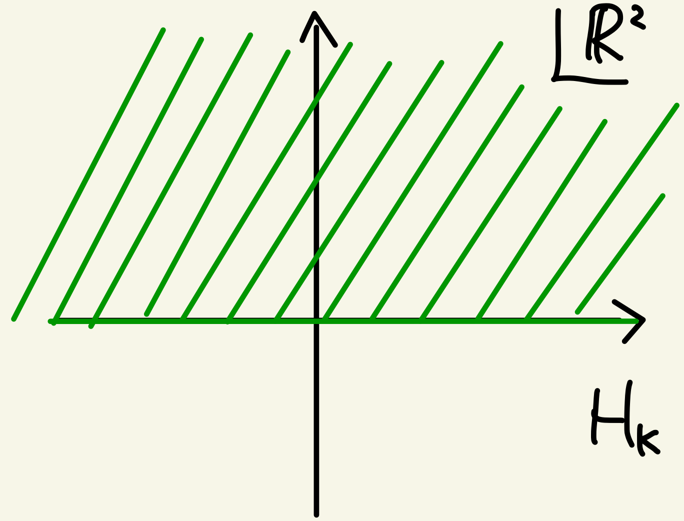
■

Section 15.2：境界付き多様体

設定：$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$

M ：位相空間

記号：$H_n := \{ x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^k \mid x_n \geq 0 \}$



◎ $\mathbb{R}^k$, H_k の関係

Thm 15.2.1

(1) $\mathbb{R}^k$ と H_k は非同相 $(\forall k \geq 1)$ (Hint: H_k から原点を除いても可縮)

(2) $\mathbb{R}^k$ は H_k の開集合と微分同相 $(\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$

$\mathbb{R}^k \underset{\text{diffeo}}{\cong} \mathbb{R}^{k-1} \times (0, \infty) \subset H_k$

アイデア

通常の n-次元 C^∞-級多様体 : $\mathbb{R}^n$ の open set 達を用いた地図帳がある.

座標変換が C^∞

境界付き : H_n の

Def 15.2.2: (O, U, u) が M 上の H_n-局所座標 (local coordinate)

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\begin{cases} O \subset M : \text{open} \\ U \subset H_n : \text{open} \\ u : O \to U : 同相写像 \end{cases}$

Def. 15.2.3:

$\mathcal{L}C(M : H_n) := \{ (O, U, u) \mid M$ 上の H_n-loc. coord. $\}$

(独自記号なので注意)

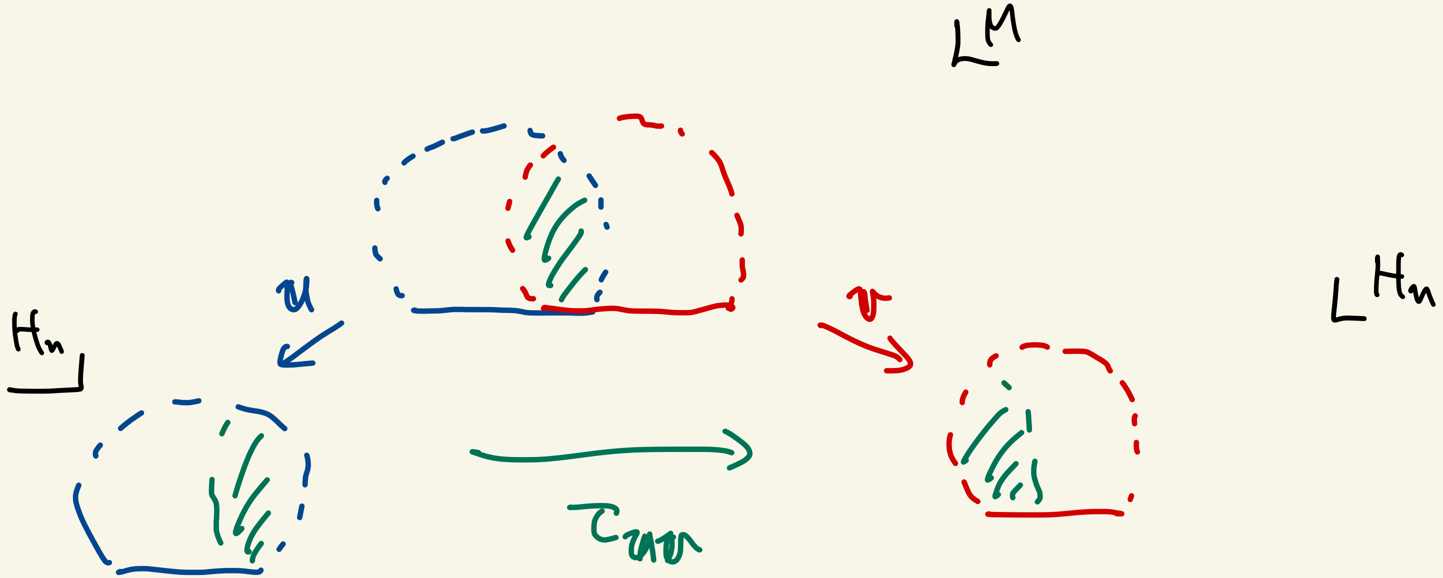
Def 15.2.4 (座標変換):

$(O, U, \mathfrak{u}), (O', V, \mathfrak{v}) \in \mathcal{LC}(M ; H_n)$ について

$\tau_{\mathfrak{u}\mathfrak{v}} := \mathfrak{v} \circ \mathfrak{u}^{-1} : \mathfrak{u}(O \cap O') \to \mathfrak{v}(O \cap O'),\ u \mapsto \mathfrak{v}(\mathfrak{u}^{-1}(u))$

とおく

$\mathfrak{u}$から$\mathfrak{v}$への座標変換



Def 15.2.5 $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{LC}(M : H_n)$ が

M 上の H_n-atlas

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ (i) $\displaystyle\bigcup_{(O, U, u) \in \mathcal{A}_0} O = M$

&

(ii) $\forall (O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}_0$

$$\underset{\text{座標変換}}{\tau_{uv}} : \underset{\underset{H_n}{\cap \text{open}}}{u(O \cap O')} \to \underset{\underset{H_n}{\cap \text{open}}}{v(O \cap O')}$$

は Def 15.1.5 の意味で C^∞ 級

Def 15.2.6 $(M, \mathcal{A})$ が n 次元 C^∞-級 境界付き多様体

$\overset{\text{def}}{\iff}$

(i) M は Hausdorff, 第二可算公理を満たす位相空間

&

(ii) $\mathcal{A}$ は 極大 H_n-atlas on M

以下 "境界付き多様体" を "manifold with boundary" (mfd. w.b.)

通常の C^∞-atlas の場合と同様に
次の命題が成り立つ.

Prop 15.2.7 : $\mathcal{A}_0 \subset LC(M : H_n)$: H_n-atlas on M
とする.

このとき $\exists ! \mathcal{A}$: 極大 H_n-atlas on M
with $\mathcal{A} \supset \mathcal{A}_0$.

$$\left(\mathcal{A} := \left\{ (O, U, u) \in LC(M ; H_n) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^\forall (O', V, v) \in \mathcal{A}_0 \,; \\ \tau_{uv}, \tau_{vu} \text{ は } C^\infty \end{array} \right\} \right.$$

とおけばよい.)

Remark："素朴な意味"では

$\{$ n-dim'l C^∞-mfds $\}$

$\cap$ ↓ 一般化

(cf. Thm 15.2.1 (2))

$\{$ n-dim'l C^∞-mfd w.b. $\}$

と解釈してよい

(厳密には $\mathbb{R}^n$-atlas を H_n-atlas に読み替える手続きがいる)

Ex 15.2.8 閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ は

1-dim'l mfd w.b.

(1次元の場合は $H_1 = C_1$ なので
境界と角の区別はない)

n次元ボール $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \Sigma x_i^2 \leq 1\}$ は

n-dim'l mfd w.b.

Section 15.3：各種概念の再定義

通常の意味の C^∞ 級多様体のときと同様に
以下の概念が定義でき，抽象論も同様に展開できる．

(Section 15.1 のおかげ)

C^∞ 級関数，接空間，C^∞ 級写像，写像の微分，

cut-off 関数，ベクトル場，テンソル場，微分形式，向き

(ブラケット積)　(外積，外微分)

ただし"曲線の速度ベクトル"については注意が必要

次の主張は正しくない

Claim : M : n-mfd w.b

$p \in M$

$v \in T_pM$ とする.

このとき C^∞ 曲線

$c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ であって

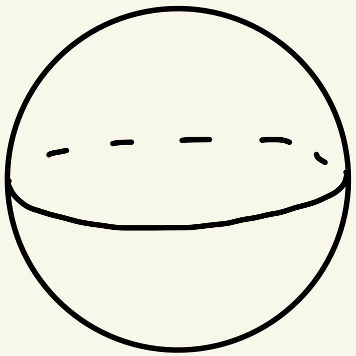
$c(0) = p$ かつ $\dot{c}(0) = v$

となるものが存在する.

Section 15.4 : 境界付多様体

M :  n 次元ボール

↓ 境界 (これから定義する)

∂M :  $n-1$ 次元球面

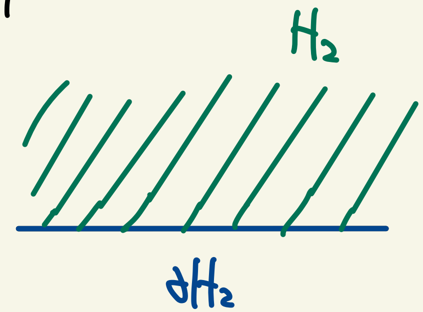
設定 : $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$

$M := (M, \mathcal{A})$: n-mfd w.b.

記号 : $H_n := \{ x = (x_1 \cdots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$

$\cup$

$\partial H_n := \{ x \in H_n \mid x_n = 0 \}$



Prop 15.4.1 : $p \in \Omega$, $(O, U, u), (O', V, v) \in \mathcal{A}$ with $p \in O \cap O'$ とする.

このとき以下は同値

(i) $u(p) \in \partial H_k$

$\Updownarrow$

(ii) $v(p) \in \partial H_k$

Def 15.4.2 : $\partial M := \{ p \in M \mid {}^{\exists}(O, U, u) \in \mathcal{A}$ with $p \in O$ s.t. $u(p) \in \partial H_n \}$

$\left(\Leftrightarrow {}^{\forall}(O, U, u) \in \mathcal{A}\right.$ with $p \in O$, $\left. u(p) \in \partial H_n \right)$

Prop 15.4.3 : $\partial M \subset M$: closed.

◎ ∂M を多様体と思いたい。

Thm 15.4.4 : 包含写像 $\iota : \partial M \hookrightarrow M$ が C^∞ 埋めこみ（像への同相，C^∞-map で各点で微分が単射）となるような ∂M 上の $n-1$ 次元 C^∞ 多様体構造が一意に存在する。

◎ 境界に誘導される向き

Thm 15.4.5: $\sigma : M \to \mathrm{Ori}(M)$ を M 上の向きとする.

このとき ∂M 上の向き $\partial\sigma : \partial M \to \mathrm{Ori}(\partial M)$ であって

以下の (☆) を満たすものが唯一つ存在する.

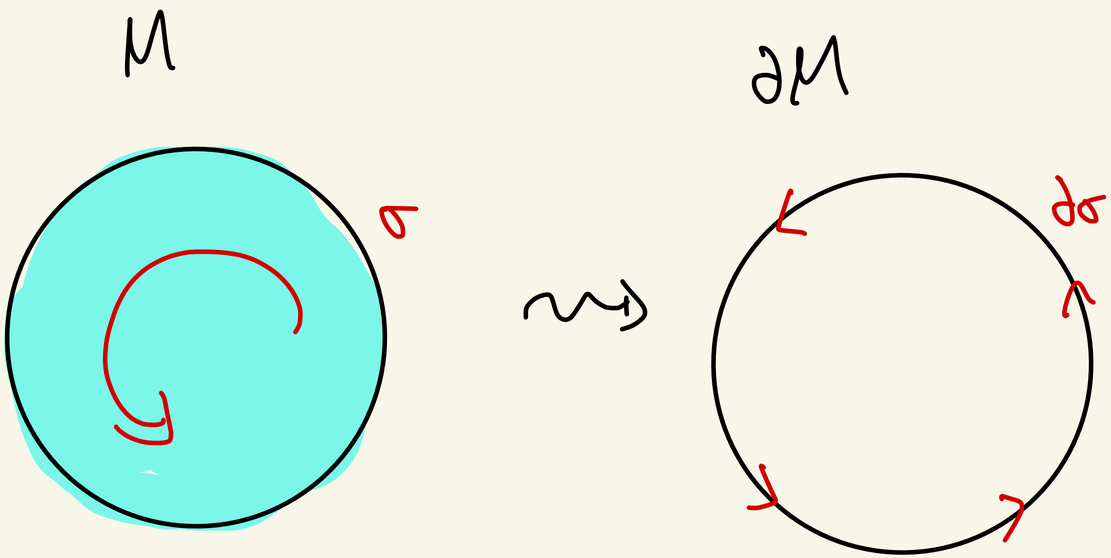
(☆) $\forall p \in \partial M \subset M$, $\forall \varepsilon \in \{\pm 1\}$, $\forall (O, U, u) \in A^{(\sigma, \varepsilon)}$

$$(-1)^n \cdot \varepsilon \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u_1}\right)_p \wedge \cdots \wedge \left(\frac{\partial}{\partial u_{n-1}}\right)_p \in (\partial\sigma)_p$$

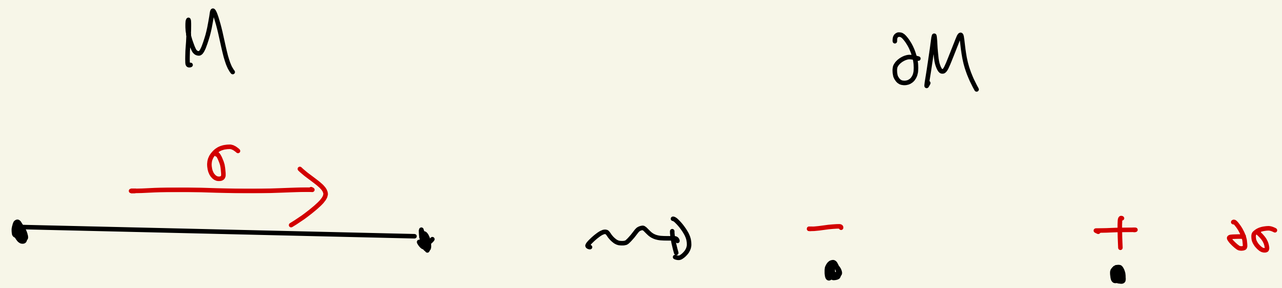
(ただし, $T_p(\partial M) \subset T_pM$ とする)

$$T_p(\partial M) = \mathrm{Span}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_i}\right)_p\right\}_{i=1,\cdots,n-1}$$

Ex 15.4.5



M
σ
$\rightsquigarrow$
∂M
$\partial\sigma$



M
σ
$\rightsquigarrow$
∂M
$-$
$+$
$\partial\sigma$